



คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการ: การบวกแบบมีการทด การลบแบบมีการยืมด้วยบล็อกฐานสิบ Practical Mathematics: Addition with Carrying and Subtraction with Borrowing with Based Ten Blocks

สุทธรัตน์ บุญเลิศ¹, นิศรา สุทธิสังข์²

Suttharat Boonlerts¹, Nisara Suthisung²

บทคัดย่อ

คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการเป็นการเชื่อมโยงสองโลกคณิตศาสตร์ที่สำคัญในระดับโรงเรียน คือโลกกายภาพเชิงความคิดรวบยอดและโลกสัญลักษณ์ซึ่งพัฒนาอย่างเป็นลำดับขั้นของวิธีการคิดและแนวทางในการคิดอย่างอิสระ (Tall, 2020a) เนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เน้นการดำเนินการทางเลขคณิตของการบวกและการลบผ่านการจับต้องกับสิ่งของเพื่อพัฒนาการคำนวณเชิงตัวเลข โดยการบวกใช้แนวคิดของการทด และการลบใช้แนวคิดของการยืม เครื่องมือที่สำคัญที่นำมาใช้เชื่อมต่อแนวคิดทั้งสองคือ บล็อกฐานสิบ

บล็อกฐานสิบจึงก่อให้เกิดคณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการผ่านการหยิบ จับ สัมผัสวัตถุเชิงกายภาพและการดำเนินการทางเลขคณิต บล็อกฐานสิบเป็นตัวจัดกระทำทางกายภาพและเป็นสื่อกึ่งรูปธรรม (semi-concrete material) ทำให้นักเรียนได้ใช้ประสาทสัมผัส หยิบจับเคลื่อนย้ายตามการคิด ใช้สำหรับการเรียนการสอนจำนวนและการดำเนินการ เน้นการลงมือปฏิบัติจริง สำหรับเนื้อหาการบวกนักเรียนใช้การทดเมื่อหลักหน่วยเกินบล็อกเต็มสิบ และการลบนักเรียนใช้การยืมเมื่อหลักหน่วยไม่พอบล็อกเต็มสิบ

คำสำคัญ : คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการ, การบวกและการลบ, บล็อกฐานสิบ

¹ อาจารย์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี Email : suttharat.boon@sru.ac.th

² อาจารย์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร Email : nisara.s@rmutp.ac.th

Abstract

Practical mathematics connects two important mathematical worlds at the school level. Specifically, the conceptual physical world and the symbolic world, which evolve in a hierarchical manner and independently. In order to promote numerical calculation, the grade 3 mathematics curriculum emphasizes the arithmetic operations of addition and subtraction by manipulating objects. Addition uses the concept of carrying and subtraction with borrowing. The decimal block is a crucial tool for making the connection between the two ideas.

The decimal block thus contributes to practical mathematics through picking up, touching physical objects, and performing arithmetic operations. The decimal block is a physical actuator and a semi-concrete material, allowing students to use their senses grasp and move by thinking used for number instructions and operations emphasis on real practice. For addition content, students use substitutions when the unit digit exceeds a block of ten. And subtracting students using borrowing when the unit digit is not enough to block the full ten for the top.

Keywords: Practical mathematics, Addition and subtraction, Based ten blocks

บทนำ

คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการเป็นกระบวนการคิดที่นักเรียนใช้วิธีการและแนวทางการคิดอย่างอิสระผ่านการเชื่อมโยงการจัดกระทำกับวัตถุเชิงกายภาพเพื่อสนับสนุนให้เกิดการคิดเชิงตัวเลข สัญลักษณ์ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการเป็นการเชื่อมโยงสองโลกคณิตศาสตร์ที่สำคัญในระดับโรงเรียน คือโลกกายภาพเชิงความคิดรวบยอดและโลกสัญลักษณ์ซึ่งพัฒนาอย่างเป็นลำดับขั้นของวิธีการคิดและแนวทางในการคิดอย่างอิสระ (Tall, 2020a)

การสอนให้นักเรียนเกิดแนวคิดของการบวกและลบเลขอย่างมีความหมายและใกล้ชิดกับความเข้าใจ การดำเนินการบวกและลบของนักเรียน จำเป็นต้องอาศัยการใช้วัตถุเชิงกายภาพที่นักเรียนคุ้นเคย เพื่อให้นักเรียนจับต้อง สัมผัส ก่อนก้าวเข้าสู่การดำเนินการทางสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อบวกและลบเลข

การใช้สื่อทางกายภาพที่นักเรียนใช้ตั้งแต่ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 คือ บล็อกฐานสิบ บล็อกฐานสิบเป็นตัวจัดกระทำทางกายภาพและเป็นสื่อกึ่งรูปธรรม (semi-concrete material) ทำให้นักเรียนได้ใช้ประสาทสัมผัส หยิบจับเคลื่อนย้ายตามการคิด ใช้สำหรับการเรียนการสอนจำนวนและการดำเนินการ เน้นการลงมือปฏิบัติจริง

เนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เน้นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ บวก ลบ คูณ และหาร การบวกและการลบจากค่าประจำหลักร้อย โดยคณิตศาสตร์ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 เน้นการบวกและการลบที่มีค่าไม่เกินสิบ ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 เน้นการบวกและการลบที่มีค่าเกินสิบ แต่ไม่ถึงร้อย

บล็อกฐานสิบเป็นเครื่องมือที่สำคัญ ที่สัมพันธ์กับวิธีการคิดการคำนวณเชิงตัวเลขของนักเรียนมาตั้งแต่ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 บล็อกฐานสิบจึงก่อให้เกิดคณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการผ่านการหยิบ จับ สัมผัสวัตถุ เชิงกายภาพและการดำเนินการทางเลขคณิต บทความนี้จะนำเสนอคณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการในแง่ของการใช้บล็อกฐานสิบสัมพันธ์กับการก่อให้เกิดการบวกเลขและการลบเลขโดยการทดและการยืมอย่างไร

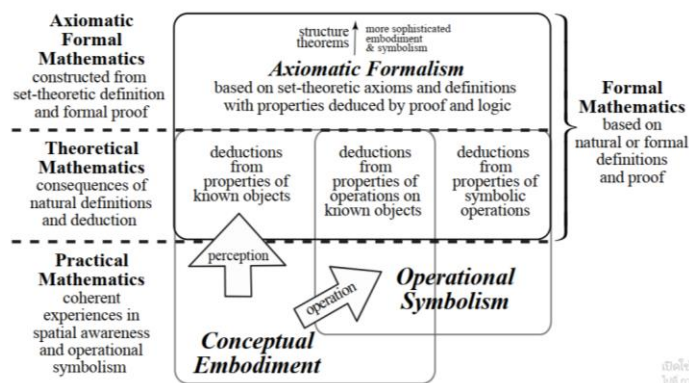
ในประวัติศาสตร์จำนวนเป็นรากฐานที่สำคัญของหลักสูตรคณิตศาสตร์ทั้งในระดับสากลและในสหรัฐอเมริกาและแคนาดา (Reys and Nohda 1994 cited in NCTM, 2000) คณิตศาสตร์ทั้งหมดที่สอนระดับโรงเรียนอนุบาลถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 12 มีพื้นฐานมาจากจำนวน การวิจัยแสดงให้เห็นว่าการเรียนรู้เกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการเป็นกระบวนการที่ซับซ้อนสำหรับเด็ก (NCTM, 2000) โครงสร้างของระบบเลขฮินดู-อารบิก หรือเลขฐานสิบต้องใช้โครงสร้างเชิงความคิดรวบยอดที่ยากสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาในการพัฒนา (Nurnberger-Haag, J., 2018) ตัวอย่างจากการสังเกตชั้นเรียน นักเรียนเขียนแสดงแทนจำนวนที่เกินสิบ เช่นนักเรียนสิ่งของที่นับได้ 13 อัน ซึ่งอ่านว่า สิบ-สาม และเขียนเป็น 103 โดยเขียนตามเสียงคือ สิบ-สาม นักเรียนลบ $64 - 18 = 54$ โดยไม่มีการยืม ซึ่งบ่งชี้ว่านักเรียนยังไม่ได้ตระหนักถึงระบบเลขฐานสิบ ค่าประจำหลัก

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อทำความเข้าใจการบวกแบบมีการทด การลบแบบมีการยืมผ่านการจัดกระทำกับบล็อกฐานสิบเกี่ยวข้องการคิดเชิงปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ผ่านการทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ข้อมูลที่ได้จากการทำความเข้าใจการบวกการลบผ่านการจัดกระทำกับบล็อกฐานสิบที่เกี่ยวข้องการคิดเชิงปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ผ่านการทบทวนเอกสารจะเป็นแนวทางหรือข้อเสนอแนะในการพิจารณาการให้ความสำคัญต่อการคิดเชิงปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ การใช้สื่อการสอนในสาระจำนวนและการดำเนินการ โดยเฉพาะบล็อกฐานสิบในระดับชั้นประถมศึกษาซึ่งนักเรียนจะได้เรียนรู้จากการใช้ประสาทสัมผัสรับรู้สิ่งต่างๆ ผ่านการลงมือกระทำ และได้แสดงแทนแนวคิดคณิตศาสตร์ สื่อสารแนวคิดกับเพื่อนในชั้นเรียน

คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการ (Practical Mathematics)

คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการ (Practical Mathematics) เป็นกระบวนการคิดที่เชื่อมโยง การหยิบ จับ สัมผัสวัตถุเพื่อพัฒนาไปสู่การคิดในรูปแบบตัวเลข สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ หรืออีกนัยหนึ่งเป็นการคิดที่เชื่อมโยงสองโลกทางคณิตศาสตร์จากโลกคณิตศาสตร์เชิงกายภาพ (embodiment world) ไปสู่โลกคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ (symbolism world) (Tall & Witzke ; 2019)

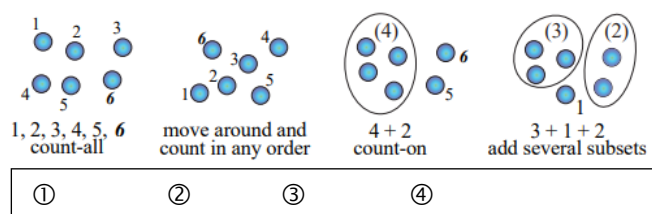
Tall (2013) ได้สร้างกรอบแนวคิดของการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องและสัมพันธ์กันอย่างสลับซับซ้อนและเรียกกรอบทั้งสามว่า “สามโลกของคณิตศาสตร์ (the three worlds of mathematics)” ดังนี้ โลกเชิงกายภาพ (embodiment world) คือการเข้าใจคณิตศาสตร์ผ่านการสัมผัสกับวัตถุเชิงกายภาพ เช่น การนับ โลกเชิงสัญลักษณ์ (symbolism world) คือ การเข้าใจคณิตศาสตร์ผ่านการคำนวณด้วยตัวเลข เช่น การบวก ลบ คูณ หาร และโลกเชิงทฤษฎี (formalism world) คือ การเข้าใจคณิตศาสตร์ผ่านการให้หลักการ กฎ นิยาม โดยคณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการเกี่ยวข้องกับการรับรู้รูปร่าง รูปทรงของสิ่งของ และการดำเนินการสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์



ภาพที่ 1 กรอบการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ระยะยาว

ที่มา : Tall & Witzke (2019)

คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการเกี่ยวข้องกับลำดับการพัฒนาการคิดของวิธีการและแนวทางการคิดอย่างอิสระผ่านการเชื่อมโยงการจัดกระทำกับวัตถุเชิงกายภาพเพื่อสนับสนุนให้เกิดการคิดเชิงตัวเลข สัญลักษณ์ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น การบวกจำนวน



ภาพที่ 2 จำนวนสิ่งของที่เป็นอิสระจากลำดับและการจัดวาง (Tall, 2020a; p.8)

จากแผนภาพ การหาผลรวมของ 6 อาจใช้วิธีการนับวงกลมทั้งหมดที่เลววงกลม (①) เลื่อนวงกลมและนับวงกลมที่เลื่อนออกไปที่เลว (②) นับต่อจาก 4 ที่เลววงกลมเป็น 5 และ 6 ได้ $4+2$ (③) แยกออกมาเป็นกลุ่มย่อยได้ $3+1+2$ (④) (Tall, 2020a; 8)

บล็อกฐานสิบ

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งอเมริกากำหนดหลักการและมาตรฐานคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนว่า "การจัดการเรียนการสอนตั้งแต่ระดับเตรียมอนุบาลถึงเกรด 12 ควรให้นักเรียนทุกคนใช้การแสดงแทน (representation) เพื่อจำลองและตีความปรากฏการณ์ทางกายภาพ สังคม และคณิตศาสตร์" การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ของเด็กมักจะเกี่ยวกับวัตถุและการกระทำโดยผ่านประสบการณ์ตรง (NCTM, 2000) ซึ่งสมาคมฯ แนะนำการสอนค่าประจำหลัก ด้วยบล็อกฐานสิบหรือตารางค่าประจำหลัก

นักวิจัยหลายคน เช่น Froebel Montessori Dienes Cuisenaire ได้พัฒนาตัวจัดกระทำทางคณิตศาสตร์ (manipulatives) เป็นชุดของวัตถุและตัวจัดกระทำที่สามารถทำงานเป็นกลไกเพื่อช่วยให้เด็กเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์เชิงนามธรรม (Dienes, 1960 cited in Tall, D. & Witzke, I. 2019) ตัวจัดกระทำอาจจะเป็น "วัตถุทางกายภาพ รูปภาพ หรือวัตถุเสมือนจริงใดๆ ที่ใช้เป็นแหล่งทรัพยากรในการสอนความรู้" (Silveira, Powel & Grando, 2020, อยู่ระหว่างการตีพิมพ์ อ้างถึงใน Silveira, E. (2021)

นักการศึกษาเรียกว่า ตัวจัดกระทำบล็อกฐานสิบใช้ในการเรียนการสอนจำนวนนับที่รวมถึงศูนย์ และค่าประจำตำแหน่ง เป็นตัวอย่างของการสอนที่เน้นการปฏิบัติ (hands-on) ที่แพร่หลาย (Nurnberger-Haag, J., 2018)

การพัฒนานักเรียนระดับประถมศึกษาให้เกิดความเข้าใจในโครงสร้างของระบบเลขฐานสิบเป็นเรื่องที่ยากสำหรับครู โดยเฉพาะเรื่องค่าประจำหลัก และศูนย์ (West, Griesbach, Taylor, and Taylor, 1982 cited in Nurnberger-Haag, J., 2018)

มีการตั้งคำถามว่า เราจะสอนจำนวนที่มากกว่า 10 ได้อย่างไร เราจะบวกหรือลบจำนวนที่มากกว่า 10 ได้อย่างไร คำตอบของคำถามเหล่านี้ต้องอาศัยการสอนให้นักเรียนใช้แนวคิดของการทำให้เต็มสิบ (base ten place) โดยนักเรียนอาศัยการใช้บล็อกสิบ (base ten blocks) มาเป็นเครื่องมือในการขยายแนวคิด

บล็อกฐานสิบถูกพัฒนาและนำมาใช้ในการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในสาระจำนวนและการดำเนินการ ซึ่งจะทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากขึ้น บล็อกฐานสิบเป็นตัวจัดกระทำทางคณิตศาสตร์ (mathematical manipulative) ประเภทหนึ่ง เป็นสื่อรูปธรรมที่เน้นให้นักเรียนได้เรียนรู้โดยลงมือปฏิบัติจริง วัสดุทำจากไม้ หรือพลาสติก เป็นที่นิยมใช้ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ มีการออกแบบและพัฒนาอย่างต่อเนื่องมาตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบัน

บล็อกฐานสิบที่นิยมใช้ในปัจจุบัน มีชื่อเรียกและลักษณะแตกต่างกันดังนี้ ดีนส์บล็อก (Dienes blocks) ชื่อของ Dienes มีความหมายเหมือนกันกับบล็อก Multi-base (หรือที่รู้จักในชื่อ Dienes blocks) ซึ่งดีนส์คิดค้นขึ้นเพื่อสอนเกี่ยวกับค่าประจำหลัก นอกจากนี้ยังเป็นผู้ประดิษฐ์สื่อการสอนพีชคณิตและบล็อกลอจิก ซึ่งเขาได้คิดค้นการใช้สื่อการสอนตัวจัดกระทำ (manipulative material) แบบร่วมสมัยในการสอนคณิตศาสตร์ (Web Minder, 2022)



ภาพที่ 3 บล็อกฐานสิบตามแบบของดีนส์

ที่มา : Silveira, E. (2021)

บล็อกฐานสิบ (Base Ten Blocks) ที่ออกแบบโดยดีนส์ ได้รับการยอมรับทั่วโลกมาตั้งแต่อดีต เพื่อช่วยให้เด็กเข้าใจระบบฐานสิบ บล็อกของดีนส์ประกอบไปด้วยลูกบาศก์เดี่ยวแทนบล็อกหนึ่งหน่วย แท่งที่รวมกันเป็นหนึ่งแท่งแล้วสลักเส้นเป็นสิบหน่วยเดี่ยว บล็อกของสิบเรียกแท่งสิบ บล็อกที่แกะสลักสิบของแท่งสิบเป็นร้อย แท่งจากสิบแท่งนี้เป็นลูกบาศก์ที่มีการแกะสลักเพื่อแสดงถึงหนึ่งพันหน่วย (Silveira, E. , 2021)

ดิจิบล็อก (Digi-Blocks) Elon Kohlberg เป็นผู้พัฒนาโดยออกแบบให้มีกล่องบรรจุ เด็กๆ ใช้กล่องที่ออกแบบมาเป็นพิเศษ เพื่อประกอบบล็อกเดี่ยวเป็นบล็อกสิบ จากนั้นพวกเขารวบรวมบล็อกสิบสิบบล็อกเพื่อสร้างบล็อกร้อย และประกอบบล็อกร้อย เพื่อสร้างบล็อกพัน (Digi-Block, Inc. (2022)) จากการออกแบบลักษณะบล็อกให้จัดเก็บ แยกออกได้ จัดกลุ่มใหม่ เคลื่อนย้าย ทำให้ใช้อธิบาย การทดในการบวก และการยืม

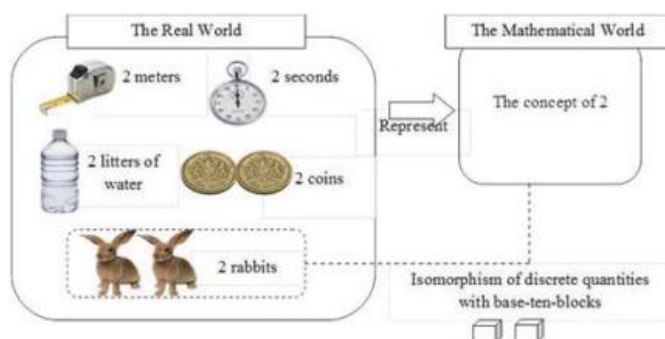
ในการลบ ส่วนบล็อกหลายหน่วย (multiunit blocks) หมายถึงถึงขั้นของบล็อกเชิงสัดส่วน (proportional blocks) ที่รวมถึง ดินสับล็อก ดิจิบล็อก และสื่ออื่นๆ ที่สามารถใช้เตรียมโครงสร้างหน่วยเดี่ยวแล้วประกอบไปเป็นหน่วยที่มากขึ้นได้ (Nurnberger-Haag, J., 2018)

ในบทความนี้ผู้เขียนเรียกรวมเป็น บล็อกฐานสิบตามคำศัพท์ของ NCTM (2000) ประกอบด้วย บล็อกหน่วย บล็อกแท่งสิบ บล็อกถาดร้อย (ถาดบรรจุบล็อก) ลักษณะบล็อกแยกออกและจัดกลุ่มใหม่ เคลื่อนย้ายได้ ดังที่หนังสือเรียนคณิตศาสตร์สำนักพิมพ์ สำนักพิมพ์ GAKKOH TOSHO ฮิโตะทสึมะทสึ, ซิน, โยะชิโอะ โอะคะดะ, โฮอิจิโร มะจิตะ และคณะ (2554) นำเสนอการใช้บล็อกอย่างต่อเนื่อง และเป็นระบบตั้งแต่ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1- 6 เริ่มตั้งแต่จำนวนนับที่รวมศูนย์ไปด้วย (whole number) การนับ การบวก การลบ การคูณ การหาร ค่าประจำหลัก ทศนิยม ลักษณะการใช้บล็อกเพื่อการคิดคำนวณจะใช้บล็อกเป็นสื่อทั้งรูปธรรมให้นักเรียนได้ดำเนินการจัดกระทำ การนับ การบวก การลบจำนวนบล็อกโดยการสัมผัสกับบล็อกก่อนก้าวเข้าสู่การเขียนตัวเลขและการคำนวณในโลกสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์



ภาพที่ 4 ชุดสื่อบล็อกหนึ่งหน่วย บล็อกห้า บล็อกแท่งสิบ ถาดบรรจุ สำหรับนักเรียน

Kim, R., & Albert, L.R. (2014) ศึกษาประวัติศาสตร์ของบล็อกฐานสิบ และกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องดังนี้ บล็อกฐานสิบอาจมีบทบาทเป็นตัวกลางเชื่อมโยงระหว่างโลกจริงกับโลกคณิตศาสตร์ (Lesh, 1979 cited in Kim, R., & Albert, L.R. ; 2014). Post (1977 cited in Kim, R., and Albert, L.R. ; 2014) ใช้คำว่า สมสัณฐาน (isomorphic) เพื่อแสดงถึงความคล้ายคลึงกันระหว่างโลกคณิตศาสตร์กับโลกจริง โดยให้เหตุผลว่าการสมสัณฐานมีความสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน เพราะอาจเปลี่ยนความคิดรวบยอดที่เป็นนามธรรมเป็นแบบที่เข้าถึงได้ในชีวิตจริงของนักเรียน



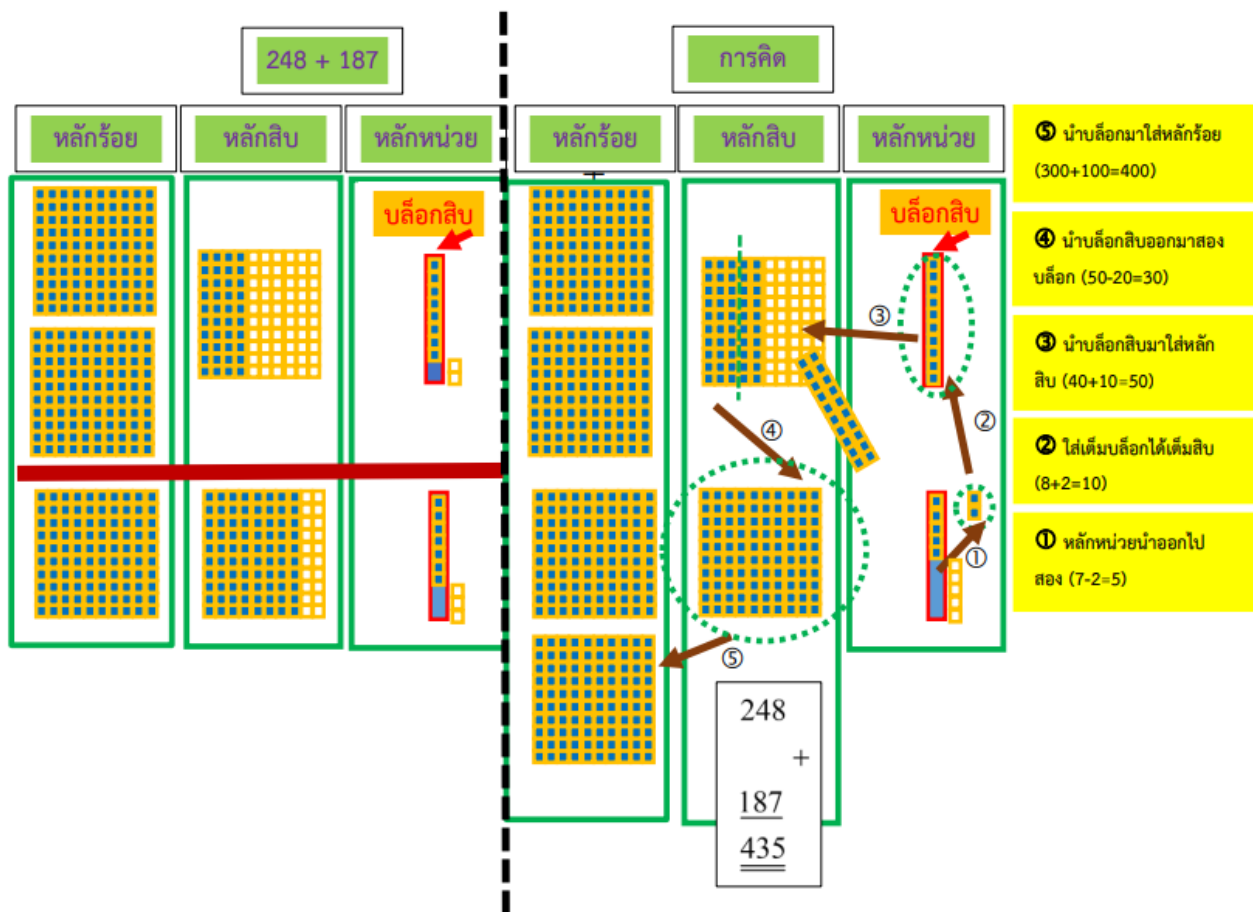
ภาพที่ 5 สมสัณฐานของความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์

ที่มา : Kim, R., & Albert, L.R. (2014)

การบวกแบบมีการทดการลบแบบมีการยืมผ่านการจัดกระทำบล็อกฐานสิบ

จากแนวคิดทฤษฎีที่กล่าวมาข้างต้น เมื่อนำมาอธิบายคณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการผ่านการจัดกระทำบล็อกฐานสิบ ในปัญหาการบวกแบบมีการทด $248 + 187$ และการลบแบบมีการยืม $425 - 286$ สามารถอธิบาย แสดงแทนได้ดังภาพ

การบวก $248 + 187$ เป็นการดำเนินการรวมจำนวนสองจำนวนคือ ตัวตั้ง 248 และตัวบวก 187 หลักสำคัญในการบวกอยู่ที่หลักหน่วย $8+7=8+2+5$ เมื่อ $8+2=10$ ทำให้เกิดการทดไปยังหลักสิบ และหลักหน่วยเป็น 5



ภาพที่ 6 การบวก $248 + 187$ โดยการใช้บล็อกฐานสิบ

การบวกแบบมีการทดใช้บล็อกอย่างไร ปัญหาคณิตศาสตร์มาจากบทเรียนในระดับชั้นประถมศึกษา เรียนในระดับชั้นประถมศึกษา

ปีที่ 3 (อิโตะทสึมะทสึ, ซิน, โยะชิโอะ โอะคะดะ, โซอิจิโร่ มะจิตะ และคณะ, 2554)

แนวคิดที่ 1 นักเรียนจัดกลุ่ม บรรจุบล็อกให้เต็มถาดร้อย และแท่งสิบ เมื่อรวมบล็อกทุกชนิดแล้ว จะได้ บล็อกถาดร้อย 4 ถาด และบล็อกแท่งสิบ 3 แท่ง บล็อกหน่วย 5 อัน ดังนั้นผลรวมของ $248 + 187$ เท่ากับ 435 ซึ่งการดำเนินการนี้เป็นอิสระไม่ขึ้นกับลำดับการคำนวณ

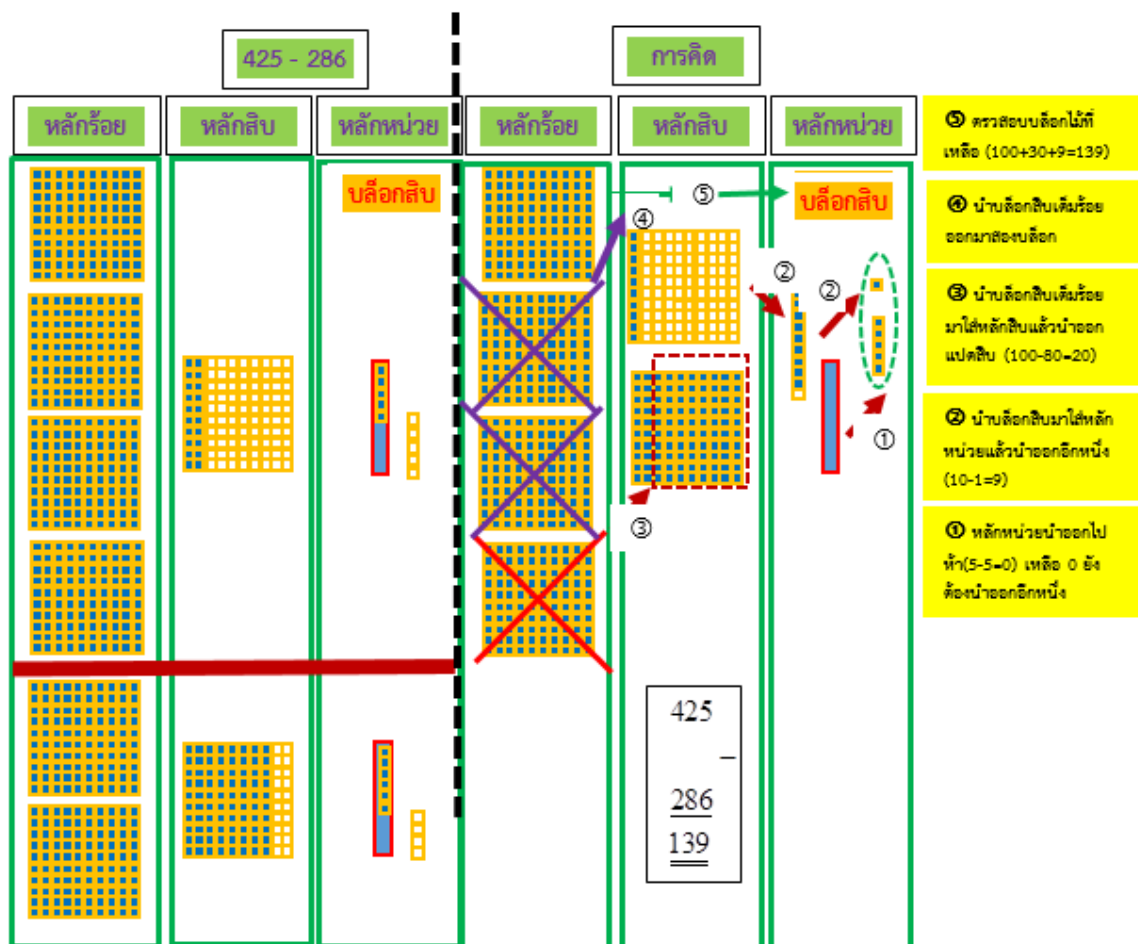
แนวคิดที่ 2 การบวก $248 + 187$ จากภาพที่ 6 การจัดกระทำกับบล็อก การเคลื่อนบล็อกสอดคล้องกับความหมายการบวกแบบมีการทดหรือการย้ายบล็อก ย้ายสิบจากหลักหน่วย ไปเป็น 1 ในหลักสิบ จะได้ $4+8+1$ ในหลักสิบ และย้ายสิบจากหลักสิบไป 1 ในหลักร้อย จะได้ $2+1+1$ ในหลักร้อย

ปัญหาคือนี้มีการทดสองครั้ง เมื่อบวกจำนวนที่มากและมีการทด วิธีการที่ดีคือเริ่มบวกจากหลักหน่วยก่อน เมื่อผลรวมเลขหลักหน่วย บล็อกหนึ่งหน่วย ถึงสิบ จะย้ายบล็อกที่ถึงสิบนั้น ไปอยู่ช่องตารางหลักสิบ เมื่อบล็อกแห่งสิบถึงร้อย นักเรียนจะย้ายแห่งสิบ 10 กลุ่มนั้นไปยังตารางหลักเลข ที่มีค่าประจำหลักร้อย

การลบ $425 - 286$ เป็นการดำเนินการหาผลต่างของจำนวนสองจำนวนคือ ตัวตั้ง 425 และตัวลบ 286 หลักสำคัญในการลบอยู่ที่หลักหน่วย 5 – 6 จำเป็นต้องยืมหลักสิบมาหนึ่งสิบกลายเป็น $15 - 6 = 9$ ทำให้เกิดการยืมจากหลักสิบ และหลักหน่วยเป็น 9

การลบ $425 - 286$ เป็นการดำเนินการระหว่างสองจำนวนคือ จำนวนที่มีอยู่เดิมคือตัวตั้งลบ 425 และตัวลบ 286 โดยนำมามีการเอาออกไป หักออกไป หรือหาว่าต่างกันเท่าไร แล้วหาจำนวนที่เหลืออยู่

ความหมายการลบในภาพ เป็นการเอาออกไป หรือหักไป เมื่อนักเรียนใช้บล็อกจึงมีบล็อกอยู่จำนวนหนึ่งเป็นตัวตั้ง แล้วมีการแยกบล็อก หรือเคลื่อนย้ายบล็อกออกไปดังภาพ คำอธิบายของนักเรียนจะผูกติดกับประสบการณ์จากประสาทสัมผัสเมื่อจับ เคลื่อนเอาบล็อกออกไปแล้วจะแสดงแทน ดังภาพที่ 7



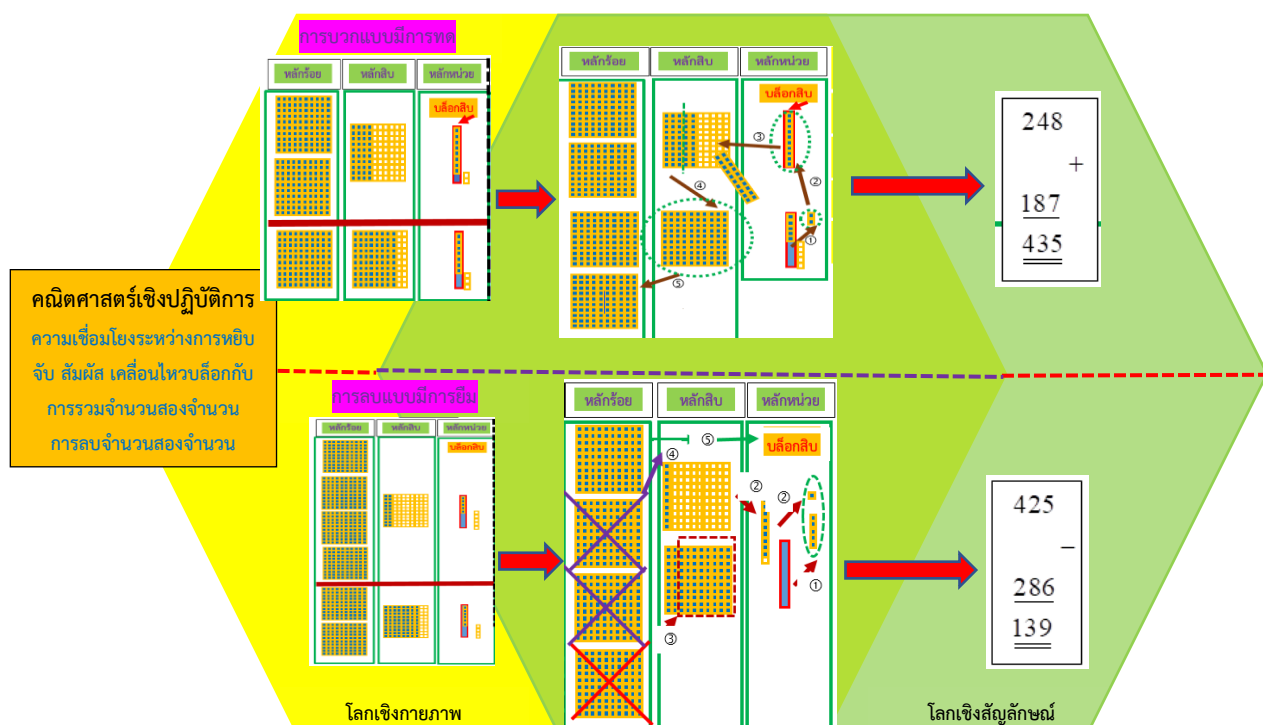
ภาพที่ 7 การลบ $425 - 286$ โดยการใช้บล็อกฐานสิบ

การลบแบบมีการยืมนี้ใช้บล็อกอย่างไร ปัญหาทางคณิตศาสตร์มาจากหนังสือเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 (อิโตะทสึมะทสึ, ชิน, โยะชิโอะ โอะคะตะ, โซอิจิโร่ มะจิตะ และคณะ, 2554)

แนวคิดที่ 1 นักเรียนวางบล็อกตามจำนวนที่มีอยู่เดิม 425 แล้วนำบล็อกถาดร้อยออกไป 2 เป็น 400-200 = 200 หักออกอีก 80 โดย นำบล็อกแท่งสิบออก 2 แท่ง เอาออกอีก 6 สิบ โดยแกะถาดร้อย นำแท่งสิบออก 6 แท่ง เหลือ 40 และหักออกอีก 6 โดย แกะแท่งสิบเอาออก 1 บล็อก และบล็อกหนึ่งหน่วยเอาออก 5 (รวมเอาออก 6 บล็อก) โดยไม่เกี่ยวกับลำดับการดำเนินการแล้วหาจำนวนบล็อกที่เหลืออยู่ คือ 139

แนวคิดที่ 2 ปัญหาข้อนี้เป็นการลบที่มีการยืมสองครั้ง คือ 425-286 วิธีการที่ดีคือเริ่มลบจากหลักหน่วยก่อนนักเรียนจัดวางบล็อกจำนวนหนึ่งตาม ตัวตั้ง แล้วเอาบล็อกออกตามตัวลบในกรณีนี้ ไม่สามารถลบเลข จากหลักหน่วยได้ ต้องยืม 1 จากหลักสิบ คือ แท่งสิบมา เป็นสิบในหลักหน่วย แล้วยืมครั้งที่สองคือ ยืม 1 ในหลักร้อย ไปเป็นสิบในหลักสิบจึงลบได้

คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการสร้างความเชื่อมโยงระหว่างการหยิบจับ สัมผัส เคลื่อนไหวบล็อกกับการรวมจำนวนสองจำนวน การลบจำนวนสองจำนวน การบวกจำนวนสองจำนวนจำเป็นต้องทำให้เกิดบล็อกสิบเมื่อบล็อกเกินสิบต้องนำบล็อกสิบไปทดในหลักสิบ และการลบจำนวนสองจำนวนจำเป็นต้องยืมหลักสิบมาเพื่อให้หลักหน่วยมีบล็อกเต็มสิบ นักเรียนเคลื่อนไหวบล็อกไปมาอย่างอัตโนมัติเพื่อหาคำตอบของการบวกและการลบ ก่อนลงมือเขียนสัญลักษณ์เชิงตัวเลขของการบวกและการลบ อีกทั้งบล็อกฐานสิบยังทำให้นักเรียนเกิดการตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าถูกต้องหรือไม่



บทสรุป

คณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการมีความสำคัญและจำเป็นในการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเฉพาะคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน เป็นการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ในโลกกายภาพเชิงความคิดรวบยอด และโลกสัญลักษณ์ ซึ่งนักเรียนควรใช้สื่อทางกายภาพเพื่อก่อตัวความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับรูปร่าง รูปทรง จำนวน และการดำเนินการ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในหลักสูตรตั้งแต่ระดับปฐมวัยถึงมัธยมศึกษา การใช้บล็อกฐานสิบจะช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้จำนวนและการดำเนินการอย่างมีความหมายด้วยความเข้าใจ ทั้งนี้การเลือกใช้บล็อกฐานสิบหรือตัวจัดกระทำใดๆ ทางคณิตศาสตร์ ต้องคำนึงถึงวัตถุประสงค์การใช้งาน สิ่งใดที่จะสอนและจะสอนอย่างไร ดังที่ Ball, 1992; Kamii, Lewis & Kirkland (2001 cited in Silveira, E.,2021) สะท้อนว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่ได้อยู่หรือมีอยู่ในไม้ พลาสติก หรือกระดาษแข็งของตัวจัดกระทำ และ Moyer (2001) กล่าวว่า ตัวจัดกระทำไม่ได้เป็นผู้สื่อความหมายหรือความเข้าใจ แต่เป็นกระบวนการการสะท้อนคิด (reflection) ของนักเรียนเองต่อการกระทำของพวกเขา ซึ่งจะสามารถช่วยนักเรียนในการสร้างความหมายได้ด้วยตนเอง

การออกแบบบล็อกฐานสิบหากให้นักเรียนเป็นผู้ใช้สื่อการสอนนี้ ได้ใช้ประสาทสัมผัส กระทำกับบล็อกบล็อกฐานสิบ ผ่านกิจกรรมการเรียนรู้หลักสูตรที่ครูออกแบบเพื่อให้นักเรียนเรียนรู้โดยการค้นพบด้วยตนเอง สอดคล้องกับแนวคิดของ บรูเนอร์ (Bruner, 1966 อ้างถึงใน ลักขณา สรวิวัฒน์, 2557) ที่เชื่อว่า การเรียนรู้เกิดจากกระบวนการค้นพบด้วยตนเอง และตามพัฒนาทฤษฎีทางสติปัญญาของมนุษย์ทางสติปัญญา ของบรูเนอร์ ในขั้นการเรียนรู้จากการกระทำ (Enactive Stage) คือขั้นของการเรียนรู้ จากการใช้ประสาทสัมผัสรับรู้สิ่งต่าง ๆ การลงมือกระทำช่วยให้เด็กเกิดการเรียนรู้ได้ดี ต่อมาจึงเป็นขั้นการเรียนรู้จากการคิด (Iconic Stage) คือขั้นที่เด็กสามารถจินตนาการสร้างมโนภาพในใจได้และสามารถเรียนรู้จากภาพแทนของจริงได้ และขั้นการเรียนรู้สัญลักษณ์และนามธรรม เรียนรู้ในเรื่องต่าง ๆ ที่ซับซ้อนและเป็นนามธรรมได้ ดังนั้นการใช้บล็อกฐานสิบมีความสำคัญในการก่อให้เกิดแนวคิดของการบวกโดยการทดเมื่อบล็อกในหลักหน่วยเกินสิบ และการลบโดยการยืมเมื่อบล็อกในหลักหน่วยของตัวตั้งไม่พอสิบ

เอกสารอ้างอิง

ลักขณา สรวิวัฒน์. (2557). *จิตวิทยาสำหรับครู*. กรุงเทพฯ : โอเดียนสโตร์.

อิโตะทสึมะทสึ, ชิน, โยะชิโอะ โอะคะดะ, โฮอิจิโร มะจิระ และคณะ.(2554). *คณิตศาสตร์สำหรับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 1* ใน *ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และมะชะมิ อิโสะดะ (บก.) (แปลจาก Mathematics for Elementary School 3rd Volume1. โดย ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และอรรถ อินทร์ประสิทธิ์). ขอนแก่น : คลังนาธรรมชาติ*.

Digi-Block, Inc. (2022, November 13). About is. Retrieved from

<http://www.digiblock.com/home/>.

Kim, R., & Albert, L.R. (2014). The History of Base-Ten-Blocks: Why and Who Made Base-Ten-Blocks? *Mediterranean journal of social sciences*, 5, 356-365.

- Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 175–197.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- Nurnberger-Haag, J. (2018). *Borrow, Trade, Regroup, or Unpack? Revealing How Instructional Metaphors Portray Base-Ten Number*. New York: Springer.
- Silveira, E. (2021). *A Study on the indications to the use of Base Ten Blocks and Green Chips in Mathematics textbooks in Brazil*. The Mathematics Enthusiast.
- Tall, D. O. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. New York: Cambridge University Press. ISBN: 9781139565202.
- Tall, D. & Witzke, I. (2019). *MINTUS: Beiträge zur mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung*. Wiesbaden: Springer.
- Tall, D. (2020a). Making Sense of Mathematical Thinking over the Long Term: The Framework of Three Worlds of Mathematics and New Developments. Draft. To appear in Tall, D. & Witzke, I. (Eds.): *MINTUS: Beiträge zur mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung*. Wiesbaden: Springer.
- Web Minder. (2022, November 13). *Zoltan Dienes Web Site*. Retrieved from <http://www.zoltandienes.com>.

