

มายาคติของการคำนวณ: การสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นคำตอบมากกว่าความสัมพันธ์เชิงปริมาณ

The Myth of Computation: A Mathematics Instruction Prioritizing Answers over Quantitative Relationships

Received: February 4, 2026

Revised: April 15, 2026

Accepted: April 17, 2026

พิมพ์ลักษณ์ มุลโพธิ์

Pimlak Moonpo

¹ มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์ จังหวัดปทุมธานี 13180¹ Valaya Alongkorn Rajabhat University under the Royal Patronage, Pathum Thani, 13180

*Corresponding Author, E-mail: pimlak@vru.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิพากษ์มายาคติของการคำนวณ ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของไทย ซึ่งหมายถึงแนวคิดที่เชื่อว่าการเรียนคณิตศาสตร์ที่ดีคือการทำให้ได้คำตอบถูกต้องอย่างรวดเร็วตามขั้นตอนที่กำหนด โดยละเลยกระบวนการสร้างความหมาย ผู้เขียนวิเคราะห์ปัญหานี้ผ่านกรอบความคิดเรื่องพีชคณิตช่วงเริ่มต้น โดยอ้างอิงจากงานวิจัยและทฤษฎีสำคัญในระดับนานาชาติเช่น แนวคิดการคิดเชิงฟังก์ชันของ Blanton & Kaput และการจัดประเภทกิจกรรมทางพีชคณิตของ Kieran จากการศึกษาพบว่าพื้นฐานที่แท้จริงของพีชคณิตไม่ได้เริ่มต้นจากการใช้สัญลักษณ์ตัวอักษร x หรือ y แต่เริ่มจากความสามารถในการให้เหตุผลเกี่ยวกับปริมาณและความสัมพันธ์ รวมถึงการปลูกฝังนิสัยในการคิดวิเคราะห์ตั้งแต่เนิ่นๆ นอกจากนี้ หลักฐานจากงานวิจัยยังแสดงให้เห็นว่าเด็กระดับประถมศึกษาตอนต้นมีความสามารถในการคิดเชิงฟังก์ชัน และสามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ ผ่านการใช้ตัวแปรและแผนภาพเพื่อแสดงความสัมพันธ์เชิงโครงสร้าง สิ่งเหล่านี้ขัดแย้งโดยสิ้นเชิงกับวิธีการสอนในไทยที่มักจะจำกัดให้นักเรียนทำหน้าที่แค่คำนวณหาคำตอบเป็นตัวเลข บทความนี้จึงเสนอให้เปลี่ยนจุดเน้นจากกิจกรรมการเปลี่ยนรูป ที่มุ่งเน้นการจัดกระทำสัญลักษณ์เปลี่ยนรูปแบบของนิพจน์หรือสมการเพื่อคงไว้ซึ่งความสมมูลกันไปสู่ กิจกรรมเชิงสร้างสรรค์โน้ตสโน เพื่อสร้างสะพานเชื่อมจากเลขคณิตไปสู่พีชคณิตอย่างมีประสิทธิภาพ ข้อเสนอแนะสำคัญคือ ครูผู้สอนควรเปลี่ยนบทบาทจากการเป็นผู้บอกวิธีทำไปสู่การเป็นผู้ออกแบบสถานการณ์ปัญหาที่กระตุ้นให้นักเรียนได้ค้นหาความสัมพันธ์เชิงปริมาณและทำให้เป็นกรณีทั่วไปทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง ซึ่งจะช่วยเตรียมพร้อมให้พวกเขาเรียนคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นได้อย่างมั่นใจในอนาคต

คำสำคัญ: การคิดเชิงพีชคณิต มายาคติของการคำนวณ การคิดเชิงฟังก์ชัน และการทำให้เป็นกรณีทั่วไป

Abstract

This article aims to critique a deeply rooted problem in Thailand's mathematics education system—the adherence to what we call the Myth of Computation. This refers to the belief that successful mathematics learning means quickly finding correct answers through prescribed procedures. The author analyzes this issue through the theoretical framework of Early Algebra, drawing on significant international research and theories. The study reveals that the true foundation of algebra does not begin with using symbolic letters x or y , but rather with the ability to reason about quantities and relationships, as well as cultivating analytical thinking habits from an early age. Moreover, research evidence shows that elementary students possess the capacity for functional thinking and can create generalizations through the use of variables and diagrams to represent structural relationships. These findings stand in stark contrast to teaching methods in Thailand, which often limit students to merely calculating numerical answers (Arithmetic results). This article proposes that if we want children to truly understand algebra, we should emphasize generational activities over transformational activities, to effectively build a bridge from arithmetic to algebra. A key recommendation is that teachers should shift their role from being procedural instructors to becoming designers of problem situations that stimulate students to discover quantitative relationships and construct mathematical rules independently. This will help prepare them to confidently learn higher-level mathematics in the future.

Keywords: Algebraic Thinking, Myth of Computation, Functional Thinking and Generalization

บทนำ

ในวงการคณิตศาสตร์ศึกษาระดับประถมศึกษาของไทย มีปัญหาเรื้อรังที่ฝังรากลึกและเป็นอุปสรรคต่อการพัฒนาศักยภาพของเด็ก นั่นคือการยึดติดกับวิธีการสอนที่เน้นการคำนวณตัวเลขเพียงอย่างเดียว (Inprasitha, 2014) เราอาจเรียกปรากฏการณ์นี้เป็นมายาคติของการคำนวณซึ่งเป็นความเชื่อที่ว่าความสำเร็จในคณิตศาสตร์วัดกันที่ความเร็วและความแม่นยำในการหาคำตอบด้วยขั้นตอนวิธี (Algorithms) ที่ครูสอนไว้ (NCTM, 2014) มายาคตินี้ทำให้บทบาทของวิชาคณิตศาสตร์ในระดับพื้นฐานถูกลดทอนคุณค่าลงเหลือเพียงการทำตามคำสั่งและแยกขาดจากความหมายที่แท้จริงของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Rittle-Johnson & Schneider, 2015)

ปัญหาหนึ่งของการสอนคณิตศาสตร์คือ เรามักแยกการคิดเลขของเด็กประถมออกจากพีชคณิตของเด็กมัธยมอย่างเด็ดขาด ทั้งที่จริงๆ แล้วการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไม่ใช่การนำองค์ความรู้ที่แยกขาดจากกันมาต่อกัน หากแต่ต้องมองเป็นการเดินทางอันต่อเนื่องของการพัฒนาทางสติปัญญาตั้งแต่ปฐมวัยจนถึงวัยรุ่น การแยกชัดเจนระหว่างเลขคณิตในระดับประถมศึกษาที่มุ่งหาคำตอบออกจากพีชคณิต ในระดับมัธยมศึกษาที่ต้องการความเข้าใจในสัญลักษณ์และโครงสร้าง การตัดขาดเส้นทางการเรียนรู้นี้เองที่ทำให้แนวคิดเชิงนามธรรมกลายเป็นเรื่องยากสำหรับผู้เรียน พ่อเด็กที่ชินกับการคิดหาผลลัพธ์ ต้องไปเจอสัญลักษณ์และแนวคิดเชิงนามธรรมในชั้นมัธยม จึงมักจะเผชิญกับอุปสรรคที่ทำให้ไม่สามารถเรียนพีชคณิตได้ (Seeley, 2004) พีชคณิตช่วงเริ่มต้น (Early Algebra) จึงเป็นเหมือนสะพานเชื่อมรอยต่อนี้ หัวใจสำคัญไม่ใช่การให้เด็กเล็กเรียนสมการยากๆ แต่เป็นการฝึกลักษณะนิสัยให้เด็กหัดมองความสัมพันธ์ โครงสร้าง และแบบรูปจากตัวเลขง่ายๆ ที่เรียนอยู่แล้ว ถ้าเราเตรียมความพร้อมแบบนี้ตั้งแต่เริ่มต้น เด็กก็จะก้าวไปเรียนคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นได้อย่างราบรื่น แต่หากเรามองข้ามเรื่องนี้ไป ก็อาจกลายเป็นอุปสรรคที่ขัดขวางการเรียนรู้ของพวกเขาในระยะยาว (Taylor-Cox, 2003)

นักเรียนที่คุ้นชินกับการคิดเพื่อหาคำตอบเพียงอย่างเดียว เมื่อต้องเผชิญกับเนื้อหาที่ซับซ้อนขึ้น มักจะติดอยู่กับกรอบวิธีคิดแบบเลขคณิต และไม่สามารถปรับตัวเข้ากับกระบวนการคิดเชิงนามธรรมที่จำเป็นต่อการเรียนพีชคณิตในระดับสูงได้ (Seeley, 2004) ดังนั้น เพื่อก้าวข้ามข้อจำกัดของวิธีคิดแบบเลขคณิตดั้งเดิม บทความฉบับนี้จึงมุ่งวิเคราะห์และวิจารณ์มายาคติของการคำนวณผ่านกรอบความคิดเรื่อง พีชคณิตช่วงเริ่มต้น ซึ่งพีชคณิตช่วงเริ่มต้น ไม่ได้หมายความว่าเป็นการนำเนื้อหาพีชคณิตระดับมัธยมมาสอนเด็กเล็ก แต่หมายถึงการปลูกฝังลักษณะการคิดและนิสัยทางปัญญา (Habits of Mind) ที่ช่วยให้ผู้เรียนมองเห็นโครงสร้างและความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ (Quantitative Relationships) โดยอิงตามงานวิจัยสำคัญในระดับนานาชาติ เช่น งานของ Smith and Thompson (2007) ที่บอกว่าหัวใจของพีชคณิตไม่ใช่ตัวอักษร x หรือ y แต่คือการให้เหตุผลเกี่ยวกับปริมาณที่เชื่อมโยงกับสถานการณ์จริง และงานของ Yackel (1997) ที่เน้นย้ำถึงการสร้างบรรยากาศในชั้นเรียนที่ส่งเสริมการให้เหตุผลและการสนทนาเรื่องคณิตศาสตร์

ประเด็นสำคัญที่บทความนี้จะพูดถึงถึงความจำเป็นในการเปลี่ยนผ่านจากการหาคำตอบไปสู่การทำให้เป็นกรณีทั่วไป (Generalization) และการทำความเข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ เช่น เครื่องหมายเท่ากับ (=) ซึ่งในบริบทของไทยมักถูกสอนให้เป็นเพียงสัญลักษณ์ของการบอกคำตอบมากกว่าการแสดงถึงความเท่ากันของปริมาณทั้งสองข้างซึ่งถือเป็นการใช้มุมมองเชิงความสัมพันธ์

ในส่วนท้าย บทความนี้จะนำเสนอแนวทางสำหรับครูผู้สอนในการทลายมายาคติเดิม โดยการออกแบบกิจกรรมที่ส่งเสริมการคิดเชิงสัมพันธ์ (Relational Thinking) และการคิดเชิงฟังก์ชัน (Functional Thinking) เพื่อให้นักเรียนไทยไม่ได้เป็นเพียงคนคำนวณที่ทำตามคำสั่ง แต่เป็นผู้สร้างองค์ความรู้ที่มีความพร้อมสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงในศตวรรษที่ 21

การคิดเชิงสัมพันธ์: รากฐานที่ถูกกลืนในห้องเรียนเลขคณิต

ในระบบการศึกษาคณิตศาสตร์ของไทยมายาคติของการคำนวณได้ฝังรากลึกจนกลายเป็นวัฒนธรรมหลักในห้องเรียน ผ่านกระบวนการฝึกฝนให้ผู้เรียนมุ่งแสวงหาเพียงผลลัพธ์ที่ถูกต้อด้วยความเร็วเป็นสำคัญ การเรียนการสอนในลักษณะนี้มักพึ่งพาการถ่ายทอดและจดจำขั้นตอนวิธีหรือสูตรสำเร็จเพื่อใช้เป็นเครื่องมือลัดในการแก้โจทย์ปัญหา อย่างไรก็ตาม การบรรลุเพียงทักษะการคำนวณเชิงตัวเลขโดยปราศจากความเข้าใจที่มำนั้นเป็นอุปสรรคทางปัญญาของผู้เรียนเมื่อต้องก้าวเข้าสู่โลกของพีชคณิตที่ซับซ้อน ซึ่งต้องการการตีความสัญลักษณ์เชิงนามธรรมมากกว่าการหาผลลัพธ์เพียงค่าเดียว

การยึดติดกับตัวเลขเช่นนี้แสดงให้เห็นถึงการมีมายาคติว่าคณิตศาสตร์คือการคำนวณ ซึ่งแท้จริงแล้วคณิตศาสตร์ควรเป็นการให้ความสำคัญกับการพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ ดังนั้น การคิดเชิงสัมพันธ์จึงกลายเป็นหัวใจในการปฏิรูปการเรียนรู้ โดย Carpenter et al. (2005) ได้ให้คำนิยามเชิงมโนทัศน์ว่า การคิดเชิงสัมพันธ์ไม่ใช่ทักษะที่สูงกว่าการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ตามปกติ แต่เป็นการเปลี่ยนแปลงมุมมองที่เปิดให้ผู้เรียนมองความเท่ากันเป็นหลักแทนที่จะให้ความสำคัญกับคำตอบที่เป็นตัวเลขเพียงอย่างเดียว

จากมุมมองที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ดังกล่าว ว่าเป็นเพียงเลขคณิตที่เน้นการหาผลลัพธ์จากการคำนวณ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อใช้เครื่องหมายเท่ากับ ยิ่งทำให้ละเลยการมองคณิตศาสตร์ว่าเป็นความสัมพันธ์และโครงสร้าง ดังนั้น จึงควรหันกลับมาพิจารณาความหมายที่แท้จริงของเครื่องหมายเท่ากับ และให้ความสำคัญกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์มากกว่าการคำนวณ

1. ความหมายที่แท้จริงของเครื่องหมายเท่ากับ: จากสัญลักษณ์บอกคำตอบสู่ความสัมพันธ์

หนึ่งในข้อบกพร่องที่ร้ายแรงที่สุดในการสอนคณิตศาสตร์แบบเน้นการคำนวณคือการนำเสนอเครื่องหมายเท่ากับ (=) ให้เป็นเพียงสัญญาณของการประกาศคำตอบ Carpenter and Levi (2000) ได้ทำการวิจัยพบว่า เด็กระดับประถมศึกษาส่วนใหญ่ในสหรัฐอเมริกาตีความเครื่องหมายเท่ากับว่าหมายถึงการคำนวณแล้วเขียนคำตอบไว้ทางขวาแทนที่จะเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์ของความสมดุลหรือความเท่ากันของปริมาณทั้งสองข้าง ยกตัวอย่างเช่น เมื่อเด็กเห็นโจทย์ $8 + 4 = \square + 5$ พวกเขามักจะเขียน 12 ลงในช่องว่าง เพราะพวกเขาคิดว่าต้องบวก 8 กับ 4 แล้วหยุดคิด โดยไม่เข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับในที่นี้ต้องการบอกว่าทั้งสองข้างต้องมีค่าเท่ากัน นั่นคือค่าที่อยู่ในช่องว่างต้องเป็น 7 เท่านั้น การเข้าใจผิดนี้เป็นข้อพิสูจน์ที่ชัดเจนว่าเด็กถูกฝึกให้คิดในรูปแบบทำให้สำเร็จมากกว่าการคิดเชิงความสัมพันธ์

ในบริบทของไทย ปัญหานี้มีความรุนแรงไม่แพ้กัน Stephens (2007) ได้ศึกษาการคิดเชิงสัมพันธ์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นใน 3 ประเทศ คือ ญี่ปุ่น ไทย และออสเตรเลีย พบว่า นักเรียนไทยส่วนใหญ่ใช้วิธีการคำนวณเพื่อหาคำตอบ ไม่ได้แสดงให้เห็นการใช้การคิดเชิงสัมพันธ์เพื่อหาคำตอบเลย ซึ่งแตกต่างจากอีก 2 ประเทศ Ladadat (2017) ยังได้ขยายความจากการศึกษาของ Stephens ไว้ว่า นั่นเป็นเพราะตำราและวิธีการสอนส่วนใหญ่ทำให้นักเรียนไทยใช้วิธีการคำนวณมากกว่าวิธีการที่ต้องใช้การคิดเชิงสัมพันธ์ นอกจากนี้ยังพบว่าหนังสือเรียนมักนำเสนอโจทย์ในรูปแบบ $3 + 5 = \square$ ซึ่งเสริมสร้างความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนว่า เครื่องหมายเท่ากับคือจุดสิ้นสุดของการดำเนินการ และการหาคำตอบต้องการทำเช่นนี้ ปิดกั้นโอกาสให้เด็กได้พัฒนาการมองเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นความสัมพันธ์แบบสองทาง (Bidirectional relation) ที่แสดงความเทียบเท่าของปริมาณ

2. การลดภาระการคำนวณสู่การทำความเข้าใจโครงสร้าง

ประเด็นสำคัญของการคิดเชิงสัมพันธ์คือการนำสมบัติต่างๆ ของการดำเนินการ เช่น สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม และสมบัติการแจกแจง มาใช้อย่างยืดหยุ่นเพื่อหาทางลัดในการคิด โดยไม่ต้องพึ่งการคำนวณแบบที่ละขั้นตามขั้นตอนวิธีที่ครูกำหนด Carpenter et al. (2005) ได้ยกตัวอย่างว่า หากนักเรียนเข้าใจการคิดเชิงสัมพันธ์ เมื่อพบโจทย์ $76 + 49$ นักเรียนไม่จำเป็นต้องทำตามขั้นตอนการบวกแบบแนวตั้งแต่สามารถคิดได้ว่า 49 ใกล้เคียง 50 ดังนั้น $76 + 49$ เท่ากับ $76 + 50 - 1$ ซึ่งก็คือ $126 - 1 = 125$ การคิดในลักษณะนี้ไม่ใช่การเดาหรือการโกง แต่เป็นการใช้ความเข้าใจเชิงโครงสร้าง (Structural understanding) ที่ Stephens (2012) ได้อธิบายไว้ว่าความเข้าใจเชิงโครงสร้างเริ่มต้นจากการที่นักเรียนไม่มองประโยคสัญลักษณ์เป็นเพียงคำสั่งให้คำนวณจากซ้ายไปขวาแต่สามารถพิจารณาประโยคสัญลักษณ์เป็นองค์รวม โดยวิเคราะห์โครงสร้างและองค์ประกอบที่สำคัญของประโยคก่อนเริ่มลงมือทำ (ดังที่ได้อธิบายไว้ข้างบน) และเข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับว่าคือสัญลักษณ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสองฝั่งที่เท่ากัน ไม่ใช่เครื่องหมายที่บอกให้หาคำตอบจากการคำนวณเพียงอย่างเดียว การคิดเชิงสัมพันธ์โดยมีความเข้าใจเชิงโครงสร้างเช่นนี้แสดงให้เห็นถึงการคิดเชิงพีชคณิตในระดับพื้นฐาน

ในห้องเรียนไทย การคิดนอกกรอบเช่นนี้มักถูกมองว่าเป็นการไม่ทำตามขั้นตอน หรือแม้แต่ถูกลงโทษว่าไม่แสดงวิธีทำแม้จะได้คำตอบที่ถูกต้อง สิ่งนี้สะท้อนถึงการยึดติดกับมายาคติที่ว่าวิธีการเดียวที่ถูกต้องคือวิธีที่ครูสอน ซึ่งเป็นอุปสรรคสำคัญต่อการพัฒนาความคิดสร้างสรรค์และความยืดหยุ่นทางคณิตศาสตร์ Blanton and Kaput (2011) เน้นย้ำว่า การคิดเชิงสัมพันธ์เป็นรากฐานสำคัญของการคิดเชิงฟังก์ชัน ซึ่งเป็นหัวใจของพีชคณิต เพราะเมื่อนักเรียนเริ่มมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณแล้ว พวกเขาจะสามารถทำให้เป็นกรณีทั่วไปและใช้สัญลักษณ์เพื่อแสดงความสัมพันธ์นั้นได้ในที่สุด

การคิดเชิงฟังก์ชันและการทำให้เป็นกรณีทั่วไป (Functional Thinking and Generalization)

แนวคิดเรื่องการคิดเชิงฟังก์ชัน เป็นหนึ่งในแนวทางที่ทรงพลังที่สุดในการนำเด็กเล็กเข้าสู่โลกของพีชคณิตโดยไม่ทำให้เด็กรู้สึกหวาดกลัวพีชคณิต การคิดเชิงฟังก์ชันช่วยให้เด็กสร้างนิสัยทางความคิดที่จำเป็นต่อพีชคณิต โดยเปลี่ยนจากความกังวลในการหาคำตอบที่ถูกต้องเพียงค่าเดียว มาเป็นการทำความเข้าใจระบบของความสัมพันธ์ ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญที่ทำให้พีชคณิตไม่น่ากลัวและเข้าถึงได้ง่ายขึ้นสำหรับผู้เรียนอายุน้อย (Kieran, 2004; Carraher & Schliemann, 2007; Blanton & Kaput, 2011; Taylor-Cox, 2003) Blanton and Kaput (2011) ให้นิยามไว้ว่า การคิดเชิงฟังก์ชันคือ กระบวนการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณที่เปลี่ยนแปลงสองปริมาณ และการใช้ความสัมพันธ์นั้นเพื่อทำนายผลลัพธ์ แนวคิดนี้ไม่ใช่เรื่องใหม่สำหรับคณิตศาสตร์ศึกษาในต่างประเทศ แต่กลับเป็นสิ่งที่ขาดหายไปอย่างน่าเสียดายในระบบการศึกษาไทย เพื่อที่จะเติมเต็มช่องว่างดังกล่าวและนำแนวคิดการคิดเชิงฟังก์ชันมาสร้างให้เกิดขึ้นจริงในห้องเรียนคณิตศาสตร์ เราจำเป็นต้องมองภาพรวมของการจัดการเรียนรู้ใหม่ทั้งหมด การเปลี่ยนผ่านนี้ไม่ใช่เพียงการแทรกเนื้อหาใหม่เข้าไปในบทเรียน แต่คือการปรับเปลี่ยนมุมมองและกระบวนการขั้นตอนในการจัดการเรียนการสอน ซึ่งประกอบไปด้วยมิติที่สำคัญ 3 ประการ เริ่มตั้งแต่การทำความเข้าใจรอยต่อของการเรียนรู้เพื่อเชื่อมจากเลขคณิตไปสู่ความสัมพันธ์ ควบคู่ไปกับการตระหนักถึงความสามารถที่ซ่อนอยู่ของผู้เรียนวัยเด็กที่มีความพร้อมในการคิดวิเคราะห์มากกว่าที่เราคาดคิด และกลไกสำคัญที่สุดที่จะช่วยดึงศักยภาพเหล่านั้นออกมาได้ คือการปรับเปลี่ยนวิธีที่ครูมีปฏิสัมพันธ์กับนักเรียนในชั้นเรียน เพื่อให้เห็นภาพการนำแนวคิดนี้ไปสู่การปฏิบัติได้อย่างเป็นรูปธรรม รายละเอียดในหัวข้อต่อไปจะขยายความถึงประเด็นสำคัญทั้ง 3 ข้อ ดังนี้

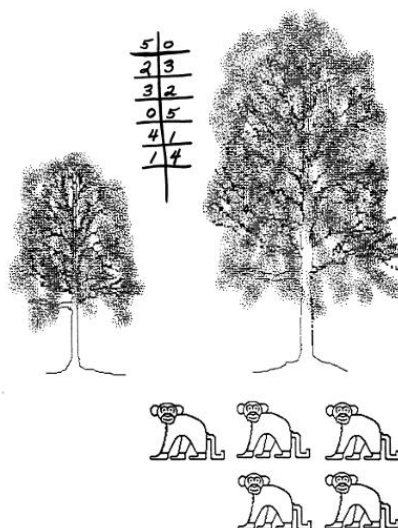
1. จากเลขคณิตสู่การคิดเชิงฟังก์ชัน: การก้าวข้ามแบบรูปที่เพิ่มขึ้นทีละขั้น

Blanton and Kaput (2011) ได้นำเสนอประเด็นที่น่าสนใจเกี่ยวกับการปรับเปลี่ยนจุดเน้นของการสอนเรื่องแบบรูปในห้องเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไป ว่า ครูมักสอนให้นักเรียนสังเกตแบบรูปที่เพิ่มขึ้นทีละขั้น (Recursive patterning) เช่น การดูว่าลำดับ 3, 6, 9, 12, ... ตัวถัดไปคืออะไร ซึ่งเด็กจะตอบได้ว่าเป็น 15 เพราะ บวกเพิ่มทีละ 3 แม้ว่าทักษะนี้จะสำคัญ แต่ยังไม่เพียงพอต่อการพัฒนาการคิดเชิงฟังก์ชันในระดับสูง

เพื่อสร้างรากฐานที่แข็งแกร่ง การสอนต้องขยับไปสู่การคิดเชิงฟังก์ชัน ซึ่งเป็นการพิจารณาว่า ปริมาณสองชุดแปรผันตามกันอย่างไร แทนที่จะดูแค่การเปลี่ยนแปลงของปริมาณชุดเดียว ผู้เรียนจะเริ่มมองเห็นความสัมพันธ์ในลักษณะสหสัมพันธ์ (Correspondence) เช่น หากจำนวนเก้าอี้หนึ่งตัวมี 4 ขา เก้าอี้ n ตัวจะมีกี่ขา จากตัวอย่างแรกจะเห็นว่าปริมาณเพียง 1 ชุด ที่นักเรียนต้องพิจารณา (แท้จริงแล้วมี 2 ชุด คือลำดับของจำนวนเป็นปริมาณอีก 1 ชุด แต่แนวโน้มที่นักเรียนจะพิจารณาโดยไม่ได้นำถึงปริมาณชุดที่ 2 คือลำดับของจำนวน) แต่การคิดเชิงฟังก์ชันจำเป็นต้องพิจารณาปริมาณ 2 ปริมาณที่เปลี่ยนแปลงไปพร้อมๆ กัน ตัวอย่างที่ 2 แสดงให้เห็นว่ามีปริมาณ 2 ปริมาณคือ จำนวนเก้าอี้และจำนวนขาเก้าอี้ ที่จะต้องพิจารณาการเปลี่ยนแปลงไปพร้อมๆ กัน การเปลี่ยนจุดเน้นนี้ทำให้นักเรียนไม่ได้มองแค่ตัวถัดไปคืออะไรแต่นักเรียนจะมีโอกาสมองหากฎทั่วไป (General rule) ที่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ในทุกกรณี

2. ศักยภาพของเด็กเล็ก: พลังแห่งการสร้างข้อคาดการณ์

ความเชื่อที่ว่าพีชคณิตและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นเรื่องที่ยากเกินไปสำหรับเด็กเล็กนั้น อาจไม่จริงเสมอไป เนื่องจากมีหลักฐานเชิงประจักษ์จากงานวิจัยของ Blanton et al. (2015) ยืนยันว่าเด็กที่มีอายุเพียง 6 ปี (ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1) มีความสามารถในการสร้างข้อคาดการณ์ (Conjectures) และการทำให้เป็นกรณีทั่วไปเกี่ยวกับสมบัติของจำนวนและฟังก์ชันได้ หากได้รับโอกาสในห้องเรียนที่เอื้อต่อการคิด เด็กเล็กสามารถใช้สัญลักษณ์หรือตัวแปรอย่างง่ายเพื่อแทนปริมาณใดๆ และสื่อสารกฎที่ตนเองค้นพบได้ผ่านคำพูด แผนภาพ หรือตาราง ทั้งนี้การทำให้เป็นกรณีทั่วไปในวัยนี้ไม่ได้หมายถึงการเขียนสูตรที่ซับซ้อน แต่คือการที่เด็กสามารถบอกได้ว่าไม่ว่าตัวเลขจะเป็นอะไร กฎนี้ก็ยังคงเป็นจริง กระบวนการนี้ช่วยเปลี่ยนคณิตศาสตร์จากการทำตามคำสั่งไปสู่การสร้างองค์ความรู้ซึ่งเป็นทักษะสำคัญในการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนในอนาคต



ภาพ 1 ตารางการคิดของนักเรียนเพื่อหาจำนวนลิงบนต้นไม้ 2 ต้น

ที่มา: Yackel (1997, p. 277)

นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างจากงานของ Yackel (1997) ที่แสดงให้เห็นว่าเราสามารถทำให้เลขคณิตสำหรับเด็กเล็กให้เป็นการคิดเชิงฟังก์ชันได้อย่างไร จากภาพ 1 Yackel (1997) นำเสนอกิจกรรมที่ให้เด็กหาจำนวนวิธีในการจัดวางสิ่ง 5 ตัว บนต้นไม้ 2 ต้น (ต้นไม้ A และ ต้นไม้ B) โดยครูถามถึงความเป็นไปได้ทั้งหมด แทนที่จะถามเพียงแค่ชุดตัวเลขใดตัวเลขหนึ่งที่ถูกต้อง กิจกรรมนี้แสดงให้เห็นศักยภาพของเด็กดังนี้ 1) การสร้างแผนภาพและตาราง แทนที่เด็กจะสุ่มหาคำตอบไปเรื่อยๆ เด็กบางคนเริ่มใช้การจัดบันทึกอย่างเป็นระบบ เช่น เขียนตารางแสดงจำนวน (5,0), (4,1), (3,2) จนถึง (0,5) แผนภาพนี้ไม่ได้เป็นเพียงการหาคำตอบแต่คือการสื่อสารโครงสร้างของความเป็นไปได้ทั้งหมด 2) การทำให้เป็นกรณีทั่วไป เด็กสามารถสรุปกฎได้ว่าถ้าจำนวนสิ่งบนต้นไม้ต้นแรกลดลงหนึ่งตัว ต้นที่สองต้องเพิ่มขึ้นหนึ่ง เพื่อให้รวมกันได้เท่าเดิม คำพูดนี้คือการทำให้เป็นกรณีทั่วไป โดยไม่ต้องใช้สูตร $x + y = 5$ แต่เป็นการเข้าใจความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันในระดับลึก

Yackel (1997) เน้นย้ำว่า การทำให้เป็นกรณีทั่วไปในวัยนี้มักปรากฏผ่านวาทกรรมในชั้นเรียน (Classroom Discourse) ซึ่งเป็นการสื่อสารผ่านคำพูดแทนสัญลักษณ์ที่ซับซ้อน ตัวอย่างเช่น เด็กสามารถอธิบายสมบัติการสลับที่ได้โดยการบอกว่า “เลขไหนจะมาก่อนก็ได้ ผลรวมมันก็เท่าเดิมนั่นแหละ” ประโยคที่ว่า “ไม่ว่าตัวเลขจะเป็นอะไร กฎนี้ก็ยังคงเป็นจริง” สะท้อนผ่านการที่เด็กทดลองใช้เลขจำนวนมาก (เช่น $100 + 200$ เทียบกับ $200 + 100$) เพื่อยืนยันว่ากฎที่ค้นพบในเลขหลักเดียวนั้นใช้ได้กับทุกจำนวน นอกจากนี้ Yackel ยังชี้ให้เห็นว่าเมื่อเด็กได้รับอนุญาตให้ใช้สัญลักษณ์ของตนเอง (เช่น การวาดรูปแทนจำนวน หรือการใช้เครื่องหมายลูกศรแสดงการเปลี่ยนแปลง) กระบวนการทางคณิตศาสตร์จะเปลี่ยนไป โดยเด็กจะสร้างความหมายของสัญลักษณ์ที่เด็กสร้างขึ้นเองเพื่อเป็นสะพานเชื่อมไปสู่ตัวแปร x, y ได้ในอนาคต และแทนที่จะรอคอยขั้นตอนวิธีจากครู เด็กจะกลายเป็นผู้สืบเสาะ ซึ่ง Yackel มองว่าเป็นพื้นฐานที่สำคัญที่สุดของการเรียนรู้พีชคณิต เพราะเป็นการฝึกให้เด็กมองหาโครงสร้างตลอดเวลา ซึ่งสะท้อนให้เห็นว่าเด็กสามารถมีอิสระในการคิดได้

งานของ Yackel (1997) ยืนยันว่าภาษากายและภาษาพูดของเด็กเล็กเมื่อรวมกับการใช้สื่อรูปธรรมหรือแผนภาพคือรูปแบบหนึ่งของการใช้ตัวแปร (Algebraic Notation) ในระยะเริ่มต้น ซึ่งช่วยให้เด็กก้าวข้ามการจดจ่อกับการคำนวณ (Arithmetic focus) ไปสู่การคิดเชิงระบบ (Systematic thinking) ที่เป็นหัวใจของพีชคณิต

3. บทบาทของครูและการสนทนาทางคณิตศาสตร์

การจะหลยมาายาคติที่เน้นเพียงการคำนวณได้นั้น ครูต้องปรับเปลี่ยนบทบาทจากการเป็นผู้เฉลยคำตอบมาเป็นผู้สร้างบทสนทนา Taylor-Cox (2003) ระบุว่ากุญแจสำคัญอยู่ที่การใช้คำถามที่กระตุ้นการสนทนาทางคณิตศาสตร์ (Mathematical dialogue) ครูควรตั้งคำถามที่ท้าทายให้นักเรียนสังเกตว่าอะไรที่เปลี่ยนแปลง และ อะไรที่ยังคงเดิม การตั้งคำถามในลักษณะนี้จะนำไปสู่การสรุปเพื่อทำให้เป็นกรณีทั่วไปที่เด็กเป็นผู้สร้างขึ้นเอง การสนทนาทางคณิตศาสตร์ทำหน้าที่เป็นเครื่องมือที่ช่วยเปลี่ยนผ่านความคิดเมื่อครูใช้คำถามว่าอะไรเปลี่ยนแปลง และอะไรยังคงเดิม แสดงว่าครูได้กระตุ้นให้เกิดการคิดเชิงฟังก์ชันโดยการให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์และรูปแบบของตัวแปรต่างๆ ว่าทำงานเกี่ยวข้องกันอย่างไร เมื่อนักเรียนได้มีพื้นที่ในการอภิปรายและสะท้อนสิ่งที่ตนเองสังเกตเห็นผ่านบทสนทนา นักเรียนจะสามารถรวบรวมแนวคิดเหล่านั้นและสกัดออกมาเป็น การทำให้เป็นกรณีทั่วไป ได้ด้วยภาษาและความเข้าใจของตนเอง เมื่อห้องเรียนคณิตศาสตร์เปลี่ยนจากการเน้นหาคำตอบที่ถูกต้อง มาเป็นการสร้างพื้นที่ให้เด็กได้ลองผิดลองถูก ในการทำให้เป็นกรณีทั่วไป พีชคณิตจะไม่ใช่วิธีที่น่ากลัวอีกต่อไป แต่จะเป็นเครื่องมือที่ทรงพลังซึ่งเด็กทุกคนสามารถเข้าถึงและใช้งานได้ตั้งแต่ระดับปฐมวัย

กิจกรรมเชิงสร้างสรรค์มีนัยกับกิจกรรมการเปลี่ยนรูป: การรื้อถอนมายาคติผ่านกรอบแนวคิดของ Kieran

ในการวิจารณ์มายาคติของการคำนวณที่ครอบงำในระบบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในประเทศไทยมาอย่างยาวนาน ผู้เขียนใช้กรอบแนวคิดของ Kieran (2004) เรื่ององค์ประกอบของกิจกรรมทางพีชคณิต (Model of Algebraic Activity) ที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางว่ามีประสิทธิภาพอย่างยิ่งในการชี้ให้เห็นถึงช่องว่างของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่มักทำให้นักเรียนยึดติดอยู่กับเพียงทักษะการทำตามขั้นตอนวิธี (Procedural skills) แต่กลับขาดความเข้าใจเชิงมีนัย (Conceptual understanding) อย่างลึกซึ้งและแท้จริง ซึ่งแนวคิดของ Kieran นี้มีนัยวิจัยจำนวนหนึ่งนำมาใช้เพื่อหาแนวทางในการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดทางพีชคณิตให้กับผู้เรียน (Lozano, 2015; Agoestanto et al., 2019; Palatnik & Koichu, 2017; Varhol et al., 2019)

Kieran (2004) ได้นำเสนอแบบจำลองที่จำแนกกิจกรรมทางพีชคณิตออกเป็น 3 กลุ่มที่เชื่อมโยงและร้อยเรียงกันอย่างมีระบบ ซึ่งหากส่วนใดส่วนหนึ่งขาดหายไป หรือถูกละเลยไม่ให้ความสำคัญ ความหมายของพีชคณิตสำหรับผู้เรียนจะไม่สมบูรณ์ ส่งผลให้การเรียนรู้คณิตศาสตร์ขาดประสิทธิภาพในระยะยาว กิจกรรมทั้ง 3 กลุ่ม มีรายละเอียดดังนี้

1. กิจกรรมเชิงสร้างสรรค์มีนัย (Generational Activities): การสร้างความหมายทางคณิตศาสตร์

กิจกรรมเชิงสร้างสรรค์มีนัยตามแนวคิดของ Kieran (2004) นั้นหมายถึง การสร้างนิพจน์และสมการ ซึ่งถือเป็นวัตถุทางพีชคณิตเพื่อใช้แทนสถานการณ์หรือความสัมพันธ์ต่างๆ เป็นกิจกรรมที่เน้นไปที่การสร้างความหมายให้กับวัตถุทางพีชคณิตเหล่านั้น ไม่ว่าจะเป็นตัวแปร ที่ใช้แทนค่าที่เปลี่ยนแปลงได้ ปริมาณที่ไม่ทราบค่า ที่ต้องการค้นหา หรือแม้กระทั่งเครื่องหมายเท่ากับ ที่มักถูกมองข้ามและเข้าใจผิดว่าเป็นเพียงสัญลักษณ์บอกคำตอบ ซึ่งกิจกรรมในกลุ่มนี้เป็นรากฐานเบื้องต้นและเป็นหัวใจสำคัญที่เป็นจุดกำเนิดของการคิดเชิงพีชคณิต

เพื่อให้เข้าใจความหมายและลักษณะของกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์มีนัย ได้ชัดเจนขึ้น พิจารณาตัวอย่างในชั้นเรียนต่อไปนี้

Moonpo (2017) ได้วิเคราะห์ชั้นเรียนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 พบว่านักเรียนได้สร้างประโยคสัญลักษณ์เพื่อแสดงแทนสถานการณ์การบวก ซึ่งถือเป็นการใช้นิพจน์ทางพีชคณิตแสดงแทนสถานการณ์การบวกที่กำหนดให้ โดยครูติดภาพสนามเด็กเล่นที่หน้ากระดาน ที่ประกอบไปด้วยภาพเด็ก 9 คนกำลังเล่นกระบะทราย และเด็ก 4 คน กำลังเล่นกระดานลื่น ครูไม่ได้สั่งให้นักเรียนหาจำนวนเด็กทั้งหมดจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในทันที (ซึ่งเป็นการหาคำตอบ) แต่ครูได้ใช้เวลาเพื่อพูดคุยกับนักเรียนว่า เล่นกระบะทรายอยู่กี่คน เล่นกระดานลื่นอยู่กี่คน และให้นักเรียนออกมายืนยันจำนวนเด็กในแต่ละกลุ่ม โดยนักเรียนเลือกชี้หรือเลือนรูปเด็ก (ซึ่งครูออกแบบไว้ให้สามารถเลือนได้) เพื่อยืนยันว่ามีจำนวน 9 คนที่กำลังเล่นกระบะทรายและ 4 คน กำลังเล่นกระดานลื่นจริง จากนั้นครูจึงถามนักเรียนว่า คิดว่าครูจะถามอะไร นักเรียนจึงตอบว่า มีเด็กทั้งหมดกี่คน และครูไม่ได้บอกหรือยืนยันว่าคำตอบนี้ถูกหรือไม่ แต่ครูเลือกที่จะถามว่า เขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ ได้อย่างไร จากนั้นให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์และแสดงวิธีการหาคำตอบ

จากตัวอย่างนี้ ถึงแม้ว่าจะไม่มีตัวแปร แต่นิพจน์เช่น $9+4$ หรือ $4+9$ หรือ สมการ $9+4=13$ ถือว่าเป็นนามธรรมสำหรับเด็กเล็กในวัยประมาณ 7 ขวบ การสร้างนิพจน์หรือสมการด้วยตัวเองของนักเรียนเช่นนี้ ถือเป็นการสร้างความหมายของวัตถุทางพีชคณิตโดยไม่เน้นที่การคำนวณหาเพียงผลลัพธ์ โดยครูพยายามสร้างงานหรือสถานการณ์ปัญหาที่ทำให้นักเรียนสามารถสร้างความหมายนี้ได้ด้วยตนเองซึ่งเป็นลักษณะสำคัญของกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์มีนัย

กิจกรรมกลุ่มนี้เกี่ยวข้องโดยตรงและมีความสัมพันธ์กับการเปลี่ยนสถานการณ์จากโลกจริงที่เด็กสามารถจับต้องและเห็นภาพได้ หรือแบบรูปทางเรขาคณิตที่มองเห็นเป็นรูปธรรม ให้กลายเป็นภาษาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมผ่านการสร้างประโยคสัญลักษณ์และสมการอย่างมีความหมาย กระบวนการนี้จึงไม่ใช่เพียงกิจกรรมที่เป็นการแปลงสัญลักษณ์อย่างง่าย ๆ แต่เป็นกิจกรรมที่สามารถสร้างสะพานเชื่อมระหว่างความคิดรูปธรรมกับความคิดนามธรรมได้

Kieran (2004) เน้นย้ำว่า กิจกรรมเชิงสร้างสรรค์มีนัยสำคัญ คือช่วงเวลาทองที่เด็กจะได้ฝึกฝนและพัฒนาการให้เหตุผลเชิงปริมาณ (Quantitative reasoning) อย่างเป็นระบบ เช่น การตีความและทำความเข้าใจว่าตัวเลขและตัวอักษรเหล่านั้นสัมพันธ์กันอย่างไรในโครงสร้างรวมของสมการหรือนิพจน์ ดังตัวอย่างในชั้นเรียนข้างต้น การเห็นว่าตัวแปรไม่ได้เป็นเพียงตัวอักษร แต่คือตัวแทนของปริมาณที่มีความหมายและบทบาทเฉพาะ หากปราศจากกิจกรรมที่สร้างความหมายเช่นนี้ สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ทั้งหมดจะเหลือคุณค่าเป็นเพียงตัวอักษรที่ไม่มีความหมายและความสัมพันธ์ใดๆ สำหรับผู้เรียน ส่งผลให้วิชาคณิตศาสตร์กลายเป็นวิชาที่ต้องท่องจำสัญลักษณ์และขั้นตอนอย่างตายตัว แทนที่จะเป็นเครื่องมือในการสื่อสารทางความคิดและการแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์ ตัวอย่างเช่น เมื่อเด็กเห็นสมการ $3n + 5 = 20$ ถ้าเด็กเหล่านั้นผ่านกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์มีนัยสำคัญ มาอย่างดีพอ เด็กๆ จะเข้าใจได้ว่า n คือจำนวนอะไรบางอย่างที่เมื่อเอามา 3 เท่าแล้วบวก 5 จะได้ 20 เด็กๆ จะมองเห็นเรื่องราวหรือสถานการณ์ที่อยู่เบื้องหลังสมการ ไม่ใช่แค่เห็นสัญลักษณ์ที่ต้องจัดการตามกฎ

2. กิจกรรมการเปลี่ยนรูป (Transformational Activities): ทักษะที่มักขาดการเชื่อมโยง

กิจกรรมการเปลี่ยนรูป คือ การดำเนินการตามกฎเกณฑ์ทางพีชคณิต (Rule-based activities) อย่างเคร่งครัด เช่น การย้ายข้างสมการโดยเปลี่ยนเครื่องหมาย การรวมพจน์ที่คล้ายกันเข้าด้วยกัน การกระจายพจน์ หรือการแยกตัวประกอบ เป้าหมายหลักของกิจกรรมเหล่านี้คือการเปลี่ยนรูปของนิพจน์หรือสมการเพื่อให้ง่ายต่อการหาคำตอบ โดยยังคงความเท่ากันหรือความสมมูลทางคณิตศาสตร์ไว้ (Kieran, 2004; Palatnik & Koichu, 2017; Agoestanto et al., 2019) ในมุมมองของผู้เขียนแล้ว กิจกรรมในกลุ่มนี้ ถือเป็นกิจกรรมที่ปรากฏชัดเจนที่สุดและเกือบจะเป็นกิจกรรมเดียวที่มีอยู่ในห้องเรียนคณิตศาสตร์ของไทย

อย่างไรก็ตาม Kieran (2004) ชี้ให้เห็นประเด็นที่สำคัญและน่าสนใจอย่างยิ่งว่า แม้กิจกรรมกลุ่มนี้จะมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง และเป็นทักษะที่ขาดไม่ได้ในการเรียนรู้พีชคณิต แต่หากผู้เรียนลงมือทำกิจกรรมเหล่านี้โดยขาดความเชื่อมโยงกับที่มาหรือความหมายเบื้องต้น (ซึ่งควรถูกสร้างขึ้นในชั้นกิจกรรมสร้างสรรค์เชิงมีนัยสำคัญ) การดำเนินการทั้งหมดเหล่านี้จะกลายเป็นเพียงการเลียนแบบขั้นตอน โดยไม่เข้าใจว่าทำไมต้องทำเช่นนั้น

นี่คือเหตุผลว่าทำไมนักเรียนไทยจำนวนมากจึงสามารถแก้สมการที่ซับซ้อนได้ในห้องเรียนสามารถทำข้อสอบได้คะแนนดี แต่กลับไม่สามารถประยุกต์ใช้ความรู้ที่ได้เมื่อโจทย์เปลี่ยนบริบทหรือรูปแบบเล็กน้อย หรือมักจะสับสนและลืมขั้นตอนเหล่านั้นได้ง่ายดายเมื่อเวลาผ่านไปไม่นาน เพราะนักเรียนเหล่านั้นจดจำวิธีการได้ แต่ไม่เข้าใจเหตุผลที่อยู่เบื้องหลังการเปลี่ยนแปลงรูปเหล่านั้น ความรู้จึงไม่ฝังลึกและไม่ยั่งยืน ซึ่งสะท้อนได้จากผลสอบในระดับนานาชาติ PISA โดย Vanichanun (2023) ได้วิพากษ์ไว้ว่าในภาพรวมหลักสูตรไทยยังไม่มุ่งให้เด็กนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริงได้ โดยยังเน้นที่การให้ความรู้ผ่านการจดจำ การให้ความรู้ผ่านการจดจำนี้ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างเช่น สมการ $2x+5 = 9$ นักเรียนอาจจำได้ว่าการแก้สมการต้องย้ายข้างและการย้ายข้างต้องเปลี่ยนเครื่องหมายแต่ไม่เข้าใจว่านี่คือการบวกหรือลบด้วยจำนวนเดียวกันทั้งสองข้างของสมการเพื่อรักษาความสมดุล ซึ่งในตัวอย่างนี้นักเรียนจะย้าย 5 มาฝั่งขวาของสมการ เครื่องหมายข้างหน้า 5 ที่เป็น + ต้องเปลี่ยนเป็น เครื่องหมาย - เป็นต้น แต่เมื่อเจอสมการที่ซับซ้อนขึ้นเช่น $2x-(5/2) = 10$

นักเรียนจะย้ายข้างและเปลี่ยนเครื่องหมายฝั่งขวากลายเป็น $10 \times (5/2)$ ได้ เนื่องจากได้เปลี่ยนจากเครื่องหมาย - เป็น + แล้วในฝั่งซ้าย โดยไม่ได้เข้าใจคุณสมบัติของการเท่ากัน หรือเมื่อต้องอธิบายให้คนอื่นฟัง อาจไม่สามารถทำได้

3. กิจกรรมเชิงสะท้อนคิดและบูรณาการ (Global/Meta-level Activities): คณิตศาสตร์เพื่อการเข้าถึงความจริง

ตามแนวคิดของ Kieran (2004) กิจกรรมเชิงสะท้อนคิดและบูรณาการ คือ กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ทั่วไปที่สามารถใช้พีชคณิตเป็นเครื่องมือในการทำงานได้ แต่ไม่ได้จำกัดหรือผูกขาดว่าต้องใช้ตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่าเท่านั้น กล่าวคือ ผู้เรียนสามารถทำกิจกรรมเหล่านี้ได้โดยไม่จำเป็นต้องใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตเลยก็ได้ ตัวอย่างของกิจกรรมกลุ่มนี้ได้แก่ การแก้ปัญหา การสร้างแบบจำลอง การสังเกตโครงสร้าง การศึกษาการเปลี่ยนแปลง การทำให้เป็นกรณีทั่วไป การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของสองปริมาณ การให้เหตุผล และการพิสูจน์ การคาดการณ์ เป็นต้น กิจกรรมกลุ่มนี้เป็นกิจกรรมที่ทำหายที่สุด และเป็นเป้าหมายของการนำพีชคณิตไปใช้เป็นเครื่องมือทางปัญญาเพื่อการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนและหลากหลาย เป็นการใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ทั้งหมดอย่างบูรณาการเพื่อทำความเข้าใจโครงสร้างเชิงระบบของปัญหา เพื่อค้นหาแบบรูปและความสัมพันธ์ และเพื่อกำหนดผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นในอนาคต สำหรับเด็กวัยเริ่มต้นเรียนคณิตศาสตร์แล้ว กิจกรรมกลุ่มนี้ไม่ใช่การให้นักเรียนแก้สมการที่ซับซ้อน แต่คือการสร้างสภาพแวดล้อมให้นักเรียนได้มองเห็นภาพรวม สังเกตรูปแบบ และอธิบายเหตุผลเบื้องหลังตัวเลข เพื่อเตรียมความพร้อมให้สามารถเชื่อมโยงความเข้าใจนี้เข้ากับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตในอนาคตได้อย่างมีความหมาย เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการคิดและแก้ปัญหาในชีวิตจริง

เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจถึงลักษณะของกิจกรรมเชิงสะท้อนคิดและบูรณาการ ผู้เขียนขอยกตัวอย่างจากนิยามและตัวอย่างของนักวิจัยที่ได้ศึกษามา (Kieran, 2004; Lozano, 2015; Agoestanto et al., 2019; Palatnik & Koichu, 2017; Varhol et al., 2019) ดังนี้

1) การให้นักเรียนสังเกตแบบรูป (Patterns) ของตัวเลขหรือเรขาคณิต แล้วอธิบายว่าแบบรูปนั้นทำงานอย่างไร เช่น การให้นักเรียนค้นพบด้วยตนเองว่าการบวกเลขคี่กับเลขคี่ ผลลัพธ์จะเป็นเลขคู่เสมอ หรือการเข้าใจสมบัติการสลับที่ของการบวก ($8 + 5$ มีค่าเท่ากับ $5 + 8$) โดยไม่ต้องท่องจำกฎ

2) การกระตุ้นให้นักเรียนตอบคำถามว่าทำไมถึงเป็นเช่นนั้น หรือ รู้ได้อย่างไรว่าคำตอบนี้จะถูกเสมอในทุกกรณี เป็นการฝึกให้นักเรียนอธิบายตรรกะทางคณิตศาสตร์ด้วยภาษาของตนเอง

3) การนำคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาในบริบทจริง หรือการใช้สื่อรูปธรรม (เช่น บล็อก) เพื่อจำลองสถานการณ์และหาความสัมพันธ์ของปริมาณต่างๆ โดยที่ยังไม่ต้องเขียนเป็นสมการ

เมื่อผู้เรียนมองเห็นความหมายและประโยชน์ในภาพกว้างเช่นนี้ มายาคติของการคำนวณที่ว่าคณิตศาสตร์คือเรื่องของคำตอบที่ถูกต้องเพียงอย่างเดียวจะหายไป และแทนที่ด้วยความเข้าใจที่ถูกต้องและลึกซึ้งว่าคณิตศาสตร์คือภาษาสากลที่ใช้ในการสืบเสาะ ค้นคว้า และอธิบายความเป็นไปของความสัมพันธ์เชิงปริมาณในจักรวาลอย่างมีเหตุผลและเป็นระบบ ซึ่งจะเป็พื้นฐานทางการคิดที่สำคัญสำหรับการเรียนรู้พีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น ตัวอย่างเช่น การใช้สมการเชิงเส้นในการวิเคราะห์แนวโน้มราคาสินค้า การใช้ฟังก์ชันในการทำนายการเจริญเติบโตของประชากร หรือการใช้ระบบสมการในการวางแผนการผลิตในโรงงาน สิ่งเหล่านี้แสดงให้เห็นว่าพีชคณิตไม่ได้เป็นเพียงความรู้ในตำรา แต่สะท้อนให้เห็นถึงคณิตศาสตร์เพื่อการเข้าถึงความจริง โดยผู้เรียนจะต้องแปลงปรากฏการณ์ที่ซับซ้อนและไร้ระเบียบในโลกจริง ให้กลายเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายและทำนายได้

นอกจากนี้ กระบวนการดังกล่าวยังกระตุ้นให้เกิดกิจกรรมเชิงสะท้อนคิด เมื่อผู้เรียนต้องนำผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ที่ได้ กลับมาตีความและประเมินความสมเหตุสมผลภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัดในโลกจริงว่าแบบจำลองนั้นสอดคล้องกับความเป็นจริงมากน้อยเพียงใด ซึ่งถือเป็นการบูรณาการองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้ากับศาสตร์อื่น ๆ เช่น เศรษฐศาสตร์ ชีววิทยา และการบริหารจัดการ เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการตัดสินใจและแก้ปัญหาในชีวิตจริงอย่างเป็นระบบ

ปัญหาสำคัญ: ห้องเรียนไทยกระโดดข้ามกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์โน้ตค้น

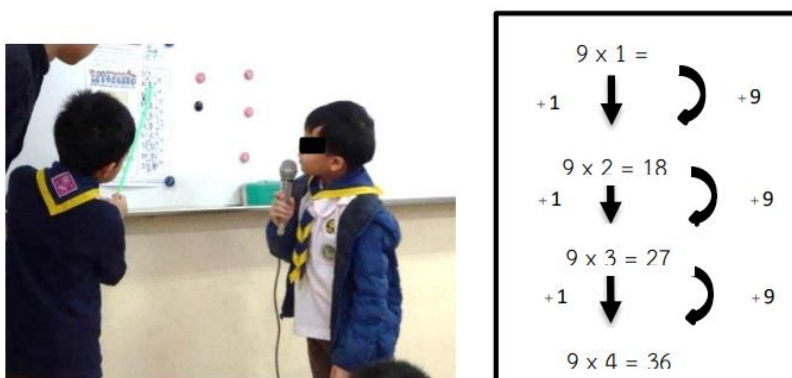
การที่ห้องเรียนไทยมักจะกระโดดข้ามกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์โน้ตค้น ไปสู่การฝึกฝนกิจกรรมการเปลี่ยนรูปโดยตรงทันที โดยไม่ได้สร้างรากฐานความเข้าใจที่แข็งแกร่งก่อน เพื่อมุ่งเน้นผลสัมฤทธิ์ทางการสอบที่เน้นความเร็วและความแม่นยำในการคำนวณเป็นหลัก คือสาเหตุสำคัญและเป็นรากเหง้าของปัญหาที่ทำให้ให้นักเรียนไทยขาดทักษะการแก้ปัญหาขั้นสูงและไม่สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ Kieran (2004) ได้เสนอไว้ว่า การแก้ไขมายาคตินี้ต้องเริ่มจากการให้พื้นที่และความสำคัญแก่การสร้าง ความหมายของสัญลักษณ์เป็นอันดับแรก ก่อนที่จะรีบไปสอนขั้นตอนการดำเนินการครูต้องชะลอความเร็ว ใช้เวลาให้เด็กได้สำรวจ ทดลอง และค้นพบความหมายด้วยตนเอง เพื่อให้นักเรียนไม่ได้เป็นเพียงผู้คำนวณ ที่ทำตามคำสั่งเท่านั้น แต่เป็นนักคิดเชิงคณิตศาสตร์ ที่เข้าใจอย่างแท้จริงและสามารถสร้างสรรค์ได้

การเชื่อมโยงกับหลักฐานเชิงประจักษ์จากงานวิจัยสากล

ข้อเสนอแนะและแนวทางที่กล่าวมานี้ไม่ได้เป็นเพียงทฤษฎีหรือความคิดเห็นส่วนตัว แต่ได้รับการสนับสนุนอย่างแข็งแกร่งจากหลักฐานเชิงประจักษ์ในงานวิจัยที่มีคุณภาพสูงหลายชิ้นในเวทีสากล อาทิเช่น งานวิจัยของ Carraher et al. (2006) ที่ศึกษาอย่างละเอียดเกี่ยวกับพัฒนาการทางคณิตศาสตร์ของเด็ก รวมถึงงานของ Blanton and Kaput (2011) ที่เน้นการคิดเชิงฟังก์ชันในระดับประถมศึกษา และงานของนักวิจัยส่วนหนึ่งที่ได้แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าเด็กระดับประถมศึกษาตอนต้นมีความสามารถและศักยภาพที่จะพัฒนาทักษะการทำให้เป็นกรณีทั่วไปและการคิดเชิงฟังก์ชันได้อย่างมีประสิทธิภาพ หากผู้สอนเปิดโอกาสและสร้างสภาพแวดล้อมการเรียนรู้ที่เหมาะสมและเอื้ออำนวย นั่นคือการให้โอกาสนักเรียนได้สำรวจ ทดลอง สังเกตแบบรูป ตั้งคำถาม และทำให้เป็นกรณีทั่วไปด้วยตนเองผ่านกระบวนการค้นพบ แทนที่จะเป็นผู้รับสูตรสำเร็จที่ครูบอกให้จำอย่างตายตัว (Taylor-Cox, 2003; Lins & Kaput, 2004; Seely, 2004; Stephens, 2007; Smith & Thompson, 2007) งานวิจัยเหล่านี้ยังชี้ให้เห็นว่า การสร้างความหมายในระยะแรกนี้มีผลอย่างมากต่อความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ระดับสูงในอนาคต เด็กที่ผ่านกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์โน้ตค้นมาอย่างดีจะมีความเข้าใจที่ยืดหยุ่น สามารถปรับใช้ความรู้ในบริบทใหม่ได้ และมีทัศนคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์

ในงานเขียนของ Isoda and Katagiri (2012) ได้อธิบายวิธีการสอนการคูณเพื่อบ่มเพาะให้นักเรียนสร้างตารางการคูณด้วยการคิดเพื่อทำให้เป็นกรณีทั่วไป ระบุว่า การสร้างความหมายและการทำให้เป็นกรณีทั่วไปในสถานการณ์การคูณ ในช่วงเริ่มต้นที่เรียนการคูณนักเรียนอาจทำความเข้าใจการคูณ อาทิเช่น แม่ 3 ด้วยแนวคิดการบวกซ้ำ $3 \times 2 = 3 + 3 = 6$ และ $3 \times 3 = 3 + 3 + 3 = 9$ ในชั้นเรียนที่เน้นการท่องจำ นักเรียนในฐานะผู้คำนวณจะบวกซ้ำไปเรื่อยๆ แต่ถ้าครูสร้างสภาพแวดล้อมที่ทำให้เกิดการสำรวจ และให้โอกาสนักเรียนได้สังเกตแบบรูป นักเรียนจะมีโอกาสค้นพบว่า ผลลัพธ์จะเพิ่มขึ้นทีละ 3 ซึ่งความเข้าใจนี้นำไปสู่การทำให้เป็นกรณีทั่วไปและนำไปใช้เพื่อหาผลลัพธ์ใหม่โดยไม่ต้องตั้งบวกใหม่ตั้งแต่เริ่มต้น เช่น $3 \times 5 = 12 + 3 = 15$ และ $3 \times 6 = 15 + 3 = 18$ ซึ่งเป็นแนวคิดที่สำคัญที่จะทำให้ นักเรียนสามารถสร้างตารางการคูณในแม่อื่นๆ ต่อไปได้ จากแนวคิดของ

Isoda and Katagiri นี้ เห็นได้จากผลงานของนักเรียน ซึ่งเป็นภาคปฏิบัติในชั้นเรียนที่ใช้การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิดตามแนวคิดของไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ ซึ่งเป็นวิธีการสอนเพื่อเปลี่ยนวัฒนธรรมในชั้นเรียน (Inprasitha, 2014) ดังภาพ 2



ภาพ 2 แสดงสร้างตารางการคูณโดยการบวกเพิ่มทีละเท่าๆ กัน
ที่มา: Kheawkham and Jensamut Saengpun (2020, p. 108)

ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงที่แท้จริงและยั่งยืนจึงต้องเกิดขึ้นที่ระดับวัฒนธรรมการสอนในห้องเรียน Kieran (2004) เตือนและเน้นย้ำอย่างจริงจังว่า การให้ความสำคัญกับทั้ง 3 กิจกรรมอย่างสมดุลและเชื่อมโยงกันของกรอบแนวคิดนี้จะช่วยให้นักเรียนเห็นภาพใหญ่ของพีชคณิตอย่างสมบูรณ์ ตั้งแต่การสร้างความหมายและการให้เหตุผลอย่างรอบคอบ ผ่านการดำเนินการอย่างมีประสิทธิภาพและถูกต้องไปจนถึงการนำไปประยุกต์ใช้ในบริบทที่กว้างขึ้นและซับซ้อนมากขึ้น

สิ่งนี้จะทำให้นักเรียนเข้าใจอย่างลึกซึ้งว่าคณิตศาสตร์ไม่ได้เป็นเพียงกระบวนการคำนวณที่แยกขาดจากชีวิตประจำวันและความเป็นจริง แต่คือภาษาสากล ที่มนุษย์ใช้เพื่อพรรณนา อธิบาย วิเคราะห์ และคาดการณ์สิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในโลกรอบตัวเราและในจักรวาล และนั่นคือการเปลี่ยนผ่านอย่างแท้จริงจากผู้คำนวณ ที่ทำตามคำสั่งและจำขั้นตอนตายตัว ไปเป็นนักคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เข้าใจสาเหตุ เหตุผล และความหมายอย่างแท้จริง และสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาและสร้างสรรค์สิ่งใหม่ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

บทสรุป

การวิเคราะห์หามายาคติของการคำนวณในบริบทการศึกษาไทย ชี้ให้เห็นถึงความจำเป็นเร่งด่วนในการปรับเปลี่ยนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จากเดิมที่มุ่งเน้นเพียงทักษะในการเปลี่ยนรูปเพื่อให้ได้คำตอบ ที่ถูกต้องตามขั้นตอนวิธี ไปสู่การสร้างพื้นที่สำหรับกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์โน้ตชน ที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้สืบเสาะและทำความเข้าใจความสัมพันธ์เชิงปริมาณอย่างแท้จริง โดยได้แสดงให้เห็นว่าการมุ่งเน้นเพียงการคำนวณเพื่อหาคำตอบส่งผลกระทบต่อพัฒนาทักษะพีชคณิตของนักเรียนทั้งในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา เนื่องจากแนวทางดังกล่าวละเลยการปูพื้นฐานด้านการให้เหตุผลเชิงปริมาณ ทำให้นักเรียนมองสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เป็นเพียงคำสั่งให้หาผลลัพธ์ และส่งผลให้มองพีชคณิตเป็นเพียงการฝึกใช้สัญลักษณ์ที่ไร้ความหมาย (Smith & Thompson, 2007) นอกจากนี้ การยึดติดกับวิธีการทางเลขคณิตยังเป็นอุปสรรคต่อการพัฒนาการคิดเชิงสัมพันธ์ โดยเฉพาะความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนต่อเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นเพียงสัญลักษณ์ที่บอกให้คำนวณ มากกว่าการแสดงความสมดุลเชิงโครงสร้างของสมการ (Stephens, 2007) ในขณะเดียวกัน การมุ่งเป้าไปที่คำตอบเฉพาะเจาะจงยังปิดกั้นโอกาสที่นักเรียนจะได้สำรวจแบบรูป

และพัฒนาคิดเชิงฟังก์ชัน ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญในการสร้างข้อสรุปหรือการทำให้เป็นกรณีทั่วไป (Blanton & Kaput, 2011; Taylor-Cox, 2003) ท้ายที่สุด เมื่อต้องเผชิญกับเนื้อหาที่ซับซ้อนขึ้น นักเรียนที่คุ้นชินกับการคิดเพื่อหาคำตอบเพียงอย่างเดียว มักจะติดอยู่กับกรอบวิธีคิดแบบเลขคณิต และไม่สามารถปรับตัวเข้ากับกระบวนการคิดเชิงนามธรรมที่จำเป็นต่อการเรียนพีชคณิตในระดับสูงได้ (Seeley, 2004) หลักฐานเชิงประจักษ์จากรรณกรรมสากลยืนยันว่า เด็กเล็กมีศักยภาพในการพัฒนาคิดเชิงสัมพันธ์และการคิดเชิงฟังก์ชันได้ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาตอนต้น หากผู้สอนเปลี่ยนบทบาทจากผู้บอกสูตรสำเร็จ มาเป็นผู้สนับสนุนให้เด็กได้สร้างข้อคาดการณ์และการทำให้เป็นกรณีทั่วไปผ่านการสังเกตแบบรูปและโครงสร้างของจำนวน

References

- Agostanto, A., Sukestiyarno, Y. L., Isnarto, & Rochmad. (2019). An analysis on generational, transformational, global meta-level algebraic thinking ability in junior high school students. *Journal of Physics: Conference Series*, 1321(3), Article 032082. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1321/3/032082>
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511–558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global nature of curricula and research* (pp. 5 - 23). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2
- Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Research Report No. 00-2). National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, University of Wisconsin-Madison. <https://eric.ed.gov/?id=ED470471>
- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, 37(1), 53-59. <https://doi.org/10.1007/BF02655897>
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115.
- Inprasitha, M. (2014). *Krabuankan Kae Panha Nai Wicha Khanittasat Radap Rongrian*. Khon Kaen Kanphim. (in Thai)
- Kheawkham, T., & Saengpun, J. (2020). Teaching practices in guiding student's mathematical ideas on multiplication toward meeting lesson objectives of multiplication: Focusing on collaboratively do phase in a classroom using lesson study cooperating open approach. *Journal of Education Naresuan University*, 22(4), 101-113. (in Thai)
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

- Lins, R., & Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 47–70). Kluwer Academic Publishers.
- Moonpo, P. (2017). *A study of algebraic reasoning in Lesson Study and Open Approach classroom* [Doctoral dissertation, Khon Kaen University]. (in Thai)
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*.
- Ladadat, N. (2017). *The study of relational thinking of upper elementary school students* [Master's thesis, Rajabhat Maha Sarakham University]. RMU Institutional Repository. <https://fulltext.rmu.ac.th/fulltext/2560/123055/Ladadat%20Nittaya.pdf> (in Thai)
- Lozano, M.-D. (2015). Using enactivism as a methodology to characterise algebraic learning. *ZDM Mathematics Education*, 47(2), 223–234. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0678-3>
- Palatnik, A., & Koichu, B. (2017). Sense making in the context of algebraic activities. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 245–262. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9744-1>
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1118–1134). Oxford University Press.
- Seeley, C. L. (2004). A journey in algebraic thinking. *NCTM News Bulletin*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Smith, J. P., III, & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95–132). Erlbaum.
- Stephens, M. (2007). Students' emerging algebraic thinking in the middle school years. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice: Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 678–687). Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).
- Stephens, M., & Ribeiro, A. (2012). Working towards algebra: The importance of relational thinking. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(3), 373–402.
- Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years? Yes! *Young Children*, 58(1), 14–21. http://resourcebinderecse.weebly.com/uploads/2/0/1/3/20133951/algebra_in_the_ec_years.pdf
- Vanichanun, P. (2023, December 7). *Saroop kho sanno chak ngan sawana 'PISA 2022 sathon wikrit kan suksa Thai: Ruam ha thang ok lae kho sanno choeng nayobai'* [Summary of proposals from the seminar 'PISA 2022 reflects the Thai educational crisis: Finding solutions and policy proposals']. Thai PBS Policy Watch. <https://policywatch.thaipbs.or.th/article/education-4>
- Varhol, A., Drageset, O.G. & Hansen, M.N. (2021). Discovering key interactions. How student interactions relate to progress in mathematical generalization. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 365–382. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00308-z>
- Yackel, E. (1997). A foundation for algebraic reasoning in the early grades. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 276–280.